

# ÇİZGE KURAMI

Üzerine kısa bir inceleme

Doç.Dr. Yurdakul Ceyhun

Elektrik Mühendisliği Bölümü  
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ

Yayın No:54

ORTA DOĞU TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

*Haluk Bingöl*

ODTU, 16 Haziran 1980

Her kitabın belli amaçları, kendine özgü yenilikleri, özellikleri ve ulaşmak istediği bir okuyucu topluluğu vardır.

Bu kitabın en büyük özelliği Türkçe olması, başka Türkçe kitaplarla karşılaştırıldığında ortaya çıkan en büyük özelliği ise çizge kuramı üzerine yazılmış ilk Türkçe kitap olmasıdır.

Bizim amacımız yalnız elektrik mühendisleri gibi dar bir okuyucu topluluğuna değil, tersine, soyut düşünmeğe ilgi duyan ve bir yerde bulmaca çözmekten de hoşlanan kişiler topluluğuna çizge kuramını tanıtmak, sevdirmek ve

çizge kuramının okuyucunun somut sorunlarına olabilecek uygulamasını yine okuyucunun kendisine buldurmaktır .

Dileriz ki, kitabı okuduğunuzda bu amacımıza erişmiş olalım.

Uygulama alanları sayılamayacak kadar çok olan çizge kuramı, son yıllarda ülkemizde de giderek kullanılmaya başlanmıştır.

Bu kitabı yazmaktaki başka bir amacımız ise, Türkçeye henüz girmekte ya da hiç girmemiş olan bu kavramlara Türkçe karşılık bularak, hemen başka bütün bilim dallarında görülen

terim kargaşalığını hiç olmazsa çizge kuramında olabildiğince önlemektir. Eğer kullandığımız terimler benimsenirse, amacımıza daha da erişmiş oluruz kuşkusuz.

Çizge kuramı üzerinde yapılacak herhangi ileri düzeydeki bir araştırmada, İngilizce yazını incelemek, bugün için hemen hemen kaçınılmazdır.

Kitabın sonundaki dizinde, Türkçe terimlerin yanına İngilizce karşılıklarını da ayrıç içinde yazdık.

Bundaki amacımız, örneğin ikikümeli çizgeler üzerine ayrıntılı araştırma yapmak isteyen bir kimseye, İngilizce yazında 'ikikümeli çizgelere', 'bipartite graph' dendiğini söyleyerek, araştırmanın çabuklaşmasına yardımcı olmaktır.

Bu arada dizin incelenirken, İngilizcedeki terim kargaşalığı da gözden kaçmamalıdır.

Ayrıca, kullanılan simge tanımlarının gereksiz yere yinelenmesini önlemek ve okumayı kolaylaştırmak için kitabın sonuna bir de simgeler dizini ekledik.

Salt kuramsal sorunların çözümlenmesinde ya da uygulamanın değişik dallarında,

belli büyüklükler ya da kavramlar arasındaki  
bağlantıları incelerken,  
söz konusu arabağlantıları  
bir çizgeye dönüştürmek  
ya kaçınılmaz  
ya da en akılcı bir yöntemdir.  
Euler (1707-1782), Königsberg kentindeki  
köprülerle ilgili bulmacanın çözümünü araştırırken,  
sorunu bir takım düğüm ve  
ayrıtların (doğru parçalarının)  
arabağlantılarına indirgiyerek,  
çizge kuramının da temellerini atmış oldu.  
Uzun yıllar, yalnız matematikçilerin uğraştığı  
ve bir yerde ilginç  
bilmece/bulmacaları çözmekten öteye  
bir uygulama alanı bulamayan çizge kuramı,  
giderek kendine özgü tanım ve teoremleri ile  
ayrı bir matematik dalı olarak,  
bu yüzyılın ortalarında  
uygulamacıların karşısına çıktı.  
Çizge kuramının evrimini incelediğimizde,  
Euler'den başka  
Hamilton, Heawood, Whitney, Tutte,  
Ore, Erdős, Katona, Polya, Seshu  
gibi birçok kişilerin emeklerini görürüz.  
Ancak, çizge kuramına en çok emeği geçmiş olan  
günümüzün matematikçilerinden Frank Harary'nin

adını burada saygıyla anmamız gerekir.  
Çizge kuramını bugünkü durumuna getiren,  
kuşkusuz bu büyük kişidir.

Tanıt yapmak, çizge kuramında sanattır bir yerde.

Ama bu kitabı tanıtlara boğarak  
okunamaz bir duruma getirmek istemedik.

Genellikle, değişik türden tanıtlara  
bিরer ikişer örnek verip,  
bir çok teoremin tanıtını  
düşünmek için okuyucuya bıraktık.

■ Simgesini "tanıt bitti" anlamına kullandık.

Her tanım ya da teoremi çizerek düşünmek,  
kitabın daha kolay anlaşılmasına  
yardımcı olacaktır.

Bu arada anlaşılması zor gelen  
bir altbölümü atlamak,  
ilerdeki bölümlerin anlaşılmasını  
çoğu kez pek o kadar etkilemeyecektir.

Bu kısa incelemede, genel çizgeler yerine,  
ayrıtlarına yön, doğrultu  
ya da ağırlık verilmemiş  
sonlu yalın çizgeler üzerinde durduk.

Kökende, kavram bakımından  
yalın çizgelerden pek bir ayrılığı olmayan  
genel çizgelerin incelenmesini,  
ilerde yazılacak,

uygulamanın somut sorunlarına dönük  
kitaplara bırakıyoruz.

Bu kitapta,  
çizge kuramının hemen bütün belli başlı sorunlarına  
değınmekle birlikte,  
Polya Teoremi  
(özel tür altçizgelerin sayılması sorunu)  
ve devrelerin dokumsal çözümlenmesi  
(çizgedeki bütün ağaçların bulunmasına dayanan  
simgesel çözümlene)  
konularına hiç girmedik.  
Kendilerine özgü önemlerinden dolayı  
bu her iki konunun da  
ayrı ayrı incelenmelerinin  
daha doğru olacağı görüşündeyiz.

Bu incelemenin bitirilmesinde  
bana yardımcı olan arkadaşlarıma,  
bu arada özellikle  
E.Sezer, T.Çiftçibaşı ve Z.Ünver'e;  
baskı işlerinde emeği geçen  
Aynak Yayınevi'ndeki dostlara  
teşekkürü bir borç bilirim.

Yurdakul Ceyhun  
Haziran ,1976  
Ankara

# İÇİNDEKİLER

sayfa

Önsöz .....	
1. Bölüm TEMEL KAVRAMLAR .....	1
1.1 Giriş .....	1
1.2 Yol ve Çevre .....	15
1.3 Kerte Dizisi ve Gerçekleştirimi .....	20
1.4 Bağlı Çizgeler .....	27
1.5 Uzaklık ve Özek .....	31
1.6 Ramsey Sayıları .....	37
2. Bölüm ÇİZGELER ÜZERİNDE İŞLEMLER VE ÖZEL YAPILI ÇİZGELER .....	47
2.1 Çakışım ile ilgili Tanım Matrisleri ..	47
2.2 Ayırıt Matrisinin Gerçekleştirimi ....	55
2.3 Çizgeler Arasında İşlemler .....	65
2.4 İkikümelili Çizgeler .....	72
2.5 Euler Çizgeleri .....	78
2.6 Hamilton Çizgeleri .....	86
2.7 Ayırıt Çizgesi .....	97
3. Bölüm ÇEVRE, KESİTLEME, AĞAÇ VE İLİŞKİN KAVRAMLAR .....	107
3.1 Altçizge Yığınları .....	107
3.2 Ağaç ve İlişkin Kavramlar .....	124
3.3 t-Çevre ve t-Kesitleme Matrisleri ...	137
3.4 t-Kesitleme Matrisinin Gerçekleştirimi	149
4. Bölüm DÜZLEMSELLİK .....	173
4.1 Düzlemsel Çizgeler .....	173
4.2 Düzlemsellik için Gerek ve Yeter Koşul .....	195
4.3 Çiftleşlik .....	206
4.4 Ayrışma .....	217
4.5 Dört Renk Sanatı .....	227
Kaynakça .....	237
Simgeler .....	249
Dizin .....	253

# 1. BÖLÜM

---

## TEMEL KAVRAMLAR

### 1.1 GİRİŞ

Elimizde, ayrıntlar ve düğümle olarak adlandıracağımız iki ayrı öğeler kümesi bulunsun. Ayrıntların oluşturduğu kümeyi  $\Psi$ , düğümlerin oluşturduğu kümeyi ise  $\Delta$  ile gösterelim. Bu kümelerdeki öğelerin sayısı

$$a = |\Psi|$$

ve

$$d = |\Delta|$$

olsun. Her  $a_j \in \Psi$  için,  $\Delta$  kümesinde karşılığın tek bir düğüm çifti  $(d_j, d_k) \in \Delta$  varsa, bu karşılığın ilişkisine,  $a_j$  ayrıntı ile  $d_j$  ve  $d_k$  düğümleri arasındaki çakışım ilişkisi diyeceğiz. Çakışım ilişkisini böylece açıkladıktan sonra,  $\zeta(d, a)$  çizgesini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

**Tanım 1.1.1**  $\Delta$  ve  $\Psi$  kümeleri arasındaki bir çakışım ilişkisinin tanımladığı yapıya,  $d$  sayıda düğümü ve  $a$  sayıda ayrıntı olan  $\zeta(d, a)$  çizgesi denir.



## 1.1 Giriş

---

Tanım 1.1.1 de olduğu gibi tanımlanan her *soyut çizgeye ilişkin, somut bir çizimsel gösterimin* varolacağı gözden kaçmamalıdır. Örneğin,

$$\Psi = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

ve

$$\Delta = (d_1, d_2, d_3, d_4)$$

kümeleri arasındaki çakışım ilişkisi,

$$a_1 \rightarrow (d_1, d_2)$$

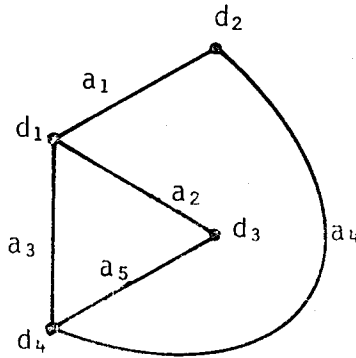
$$a_2 \rightarrow (d_1, d_3)$$

$$a_3 \rightarrow (d_1, d_4)$$

$$a_4 \rightarrow (d_2, d_4)$$

$$a_5 \rightarrow (d_3, d_4)$$

olsun. Bu soyut  $\mathcal{C}(4,5)$  çizgesinin, somut çizimsel gösterimi Şekil 1.1.1 de verildiği gibi bulunabilir.



Şekil 1.1.1  $\mathcal{C}(4,5)$  Çizgesinin çizimsel gösterimi.

## 1. BÖLÜM

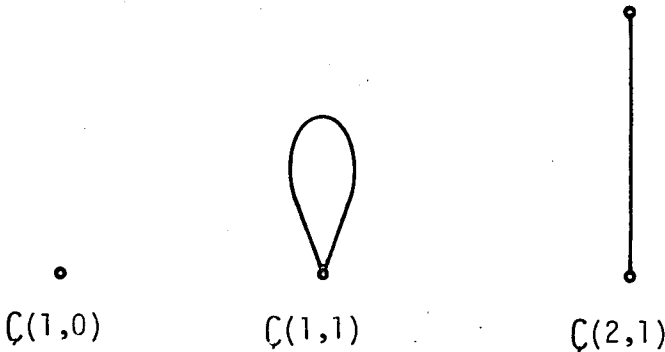
---

Her somut gösterime karşılık gelen soyut bir gösterim de bulunabileceği için, bundan böyle  $\zeta(d,a)$  çizgesinin soyut ya da somut bir gösterim olduğuna ilişkin herhangi bir ayırımda bulunmayacağız.

Çizgede, bir düğüme bağlı olan bütün ayrıtların oluşturduğu kümeye, o düğümün tanımladığı çakışım kümesi diyeceğiz. Örneğin, Şekil 1.1.1 deki  $\zeta(4,5)$  çizgesi için

$$(a_1, a_2, a_3) , (a_1, a_4) , (a_2, a_5) \text{ ve } (a_3, a_4, a_5)$$

sırasıyla  $d_1, d_2, d_3$  ve  $d_4$  düğümlerinin tanımladığı çakışım kümeleridir. Şekil 1.1.2 de gösterilen  $\zeta(1,0)$  (tek düğüm),  $\zeta(1,1)$  (tek çevre) ve  $\zeta(2,1)$  (tek ayrıt) çizgelerine kısaca *ilkel çizge* diyeceğiz ve başkaca belirtilmedikçe bu tür çizgeler üzerinde durmayacağız.



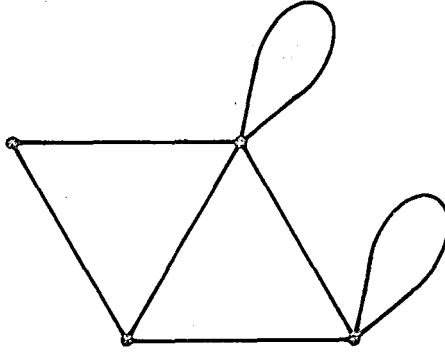
Şekil 1.1.2 ilkel çizgeler.

Bir ayrıtlın çakışık olduğu düğüm çiftine, söz konusu ayrıtlın uç düğümleri diyeceğiz. Uç

düğümleri çakışık olan ayrıtların çizgede tekçevreler oluşturacağı gözden kaçmamalıdır. Tekçevreleri de içeren çizgelere sözdeçizge diyeceğiz. Şekil 1.1.3 de, sözdeçizgeye bir örnek gösterilmiştir.

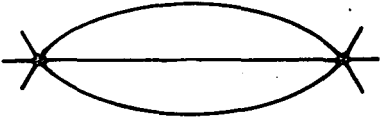
**Tanım 1.1.2** Aynı düğüm çiftine çakışık olan ayrıtlara koşut bağı ayrıtlar denir.

**Tanım 1.1.3** Bir düğümle yalnız iki ayrıtlı bağı ve bu ayrıtların öbür uç düğümle birbirlerinden değişik ise, bu ayrıtlara dizi bağı ayrıtlar denir.

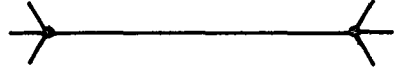


Şekil 1.1.3 Sözdeçizgeye örnek.

Şekil 1.1.4a ve b de, sırasıyla koşut ve dizi bağı ayrıtlara örnek gösterilmiştir.



(a)

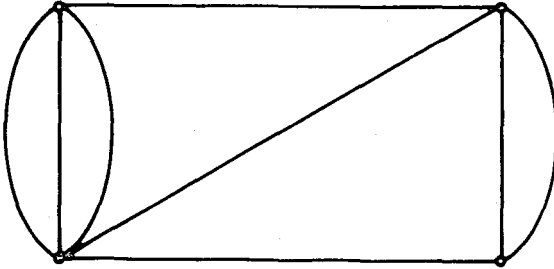


(b)

Şekil 1.1.4 Koşut ve dizi bağlı ayrıtlara örnek.

Koşut bağlı ayrıtları içeren çizgelere çoğulçizge diyeceğiz. Şekil 1.1.5 de, çoğulçizgeye bir örnek göstermiştir. Tekçevreleri ve koşut ayrıtları birlikte içeren çizgelere ise karmaşık çizge diyeceğiz. Başkaca belirtilmedikçe, bu kitapta, koşut bağlı ayrıtları ya da tekçevreleri içermeyen yalın çizgelerle ilgileneceğiz.

Çizgeyi, ayrıtların oluşturduğu bir küme olarak düşünürsek, küme kuramında kullandığımız küme işlemlerini çizgelere de uygulayabiliriz. Bu



Şekil 1.1.5 Çoğulçizgeye örnek.

işlemlerin çizgelere uygulanmasını açıklamak için, ortak ayrıt ve düğümleri bulunan  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$  çizgelerini düşünelim:

(a) Birleşim İşlemi :

$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$   
 $\mathcal{C}_0$  çizgesi  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$  de bulunan bütün ayrıtları içerecektir.

(b) Kesişim İşlemi :

$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$   
 $\mathcal{C}_0$  çizgesi yalnız  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$  ye ortak olan ayrıtları içerecektir.

(c) Çıkartım İşlemi :

$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$   
 $\mathcal{C}_0$  çizgesi  $\mathcal{C}_1$  in  $\mathcal{C}_2$  de bulunan ayrıtlarının dışında kalan ayrıtlarını içerecektir.

(c) Çembersel Toplam İşlemi :

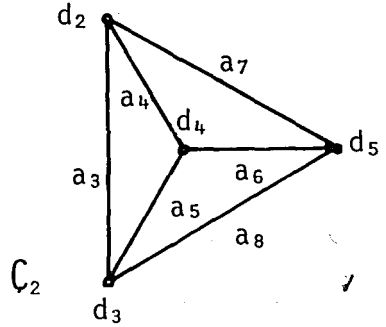
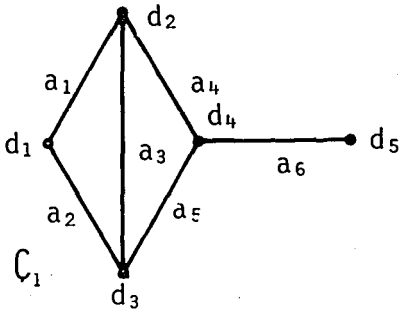
$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$   
 $\triangleq (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) - (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$   
 $\mathcal{C}_0$  çizgesi  $\mathcal{C}_1$  ile  $\mathcal{C}_2$  nin birleşiminden,  $\mathcal{C}_1$  ile  $\mathcal{C}_2$  nin kesişiminin çıkartımına eşittir.

(d) Düğüm Çıkartım İşlemi :

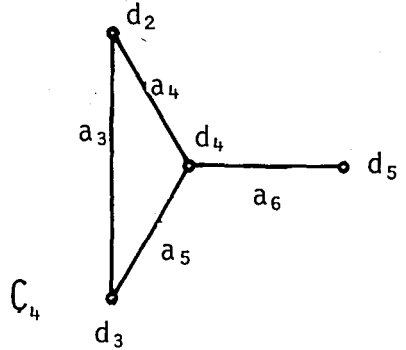
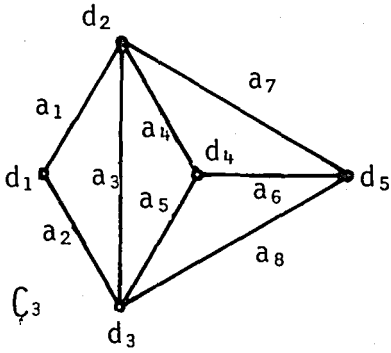
$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 - (d_1, d_2, \dots, d_j)$   
 $\mathcal{C}_0$  çizgesi en az bir uç düğümü  $(d_1, d_2, \dots, d_j)$

kümesindeki düğümlerden biri olan ayrıtların  $\mathcal{C}_1$  den çıkartımına eşittir.

Tanımladığımız bu işlemleri açıklamak için, Şekil 1.1.6a da gösterilen  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$  çizgelerini düşünelim

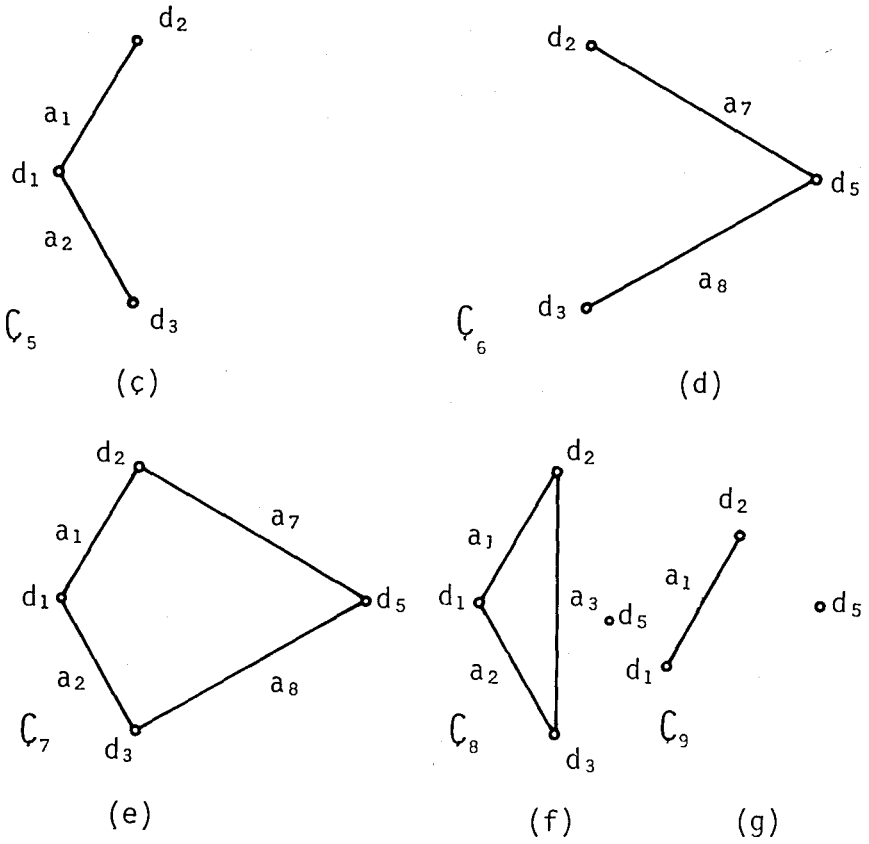


(a)



(b)

(c)



Şekil 1.1.6  $C_1$  ve  $C_2$  üzerine uygulanan işlemlerin açıklanması.

$$\begin{aligned}
 C_3 &= C_1 \cup C_2 & C_6 &= C_2 - C_1 \\
 C_4 &= C_1 \cap C_2 & C_7 &= C_1 \oplus C_2 \\
 C_5 &= C_1 - C_2 & C_8 &= C_1 - (d_4) \\
 & & C_9 &= C_1 - (d_3, d_4)
 \end{aligned}$$

çizgeleri, sırasıyla Şekil 1.1.6b, c, ç, d, e, f ve g de gösterilmiştir.

**Tanım 1.1.4**  $\zeta(0,0) = \phi$  olarak gösterilen, ayrıt ve düğümleri bulunmayan çizgeye bos çizge denir.

$\zeta_1$  çizgesi  $\zeta_2$  deki ayrıtların bir bölümünden oluşsun. Başka bir deyişle,  $\zeta_1$  in bütün ayrıtları,  $\zeta_2$  nin de ayrıtları olsun. Bu ilişkiyi,

$$\zeta_1 \subseteq \zeta_2$$

simgesi ile gösterebiliriz.

**Tanım 1.1.5**  $\zeta_1 \subseteq \zeta_2$  ilişkisini sağlayan çizgelerden:  
(a)  $\zeta_1, \zeta_2$  nin altçizgesi  
(b)  $\zeta_2$  ise,  $\zeta_1$  in üstçizgesidir.

Bu tanımdan, her çizgenin kendisinin bir alt ya da üstçizgesi olarak düşünülebileceği görülür.

Böylesine çizgelere, uygunsuz alt ya da üstçizge diyeceğiz. Başkaca belirtilmedikçe, bu tür çizgeleri göz önüne almayacağız ve

$$\zeta_1 \subset \zeta_2$$

simgesi ile gösterilen (her iki çizgenin birbirlerine eşit olabilme durumunu göz önüne almadan) yalnız uygun alt ya da üstçizgelerle ilgileneceğiz.

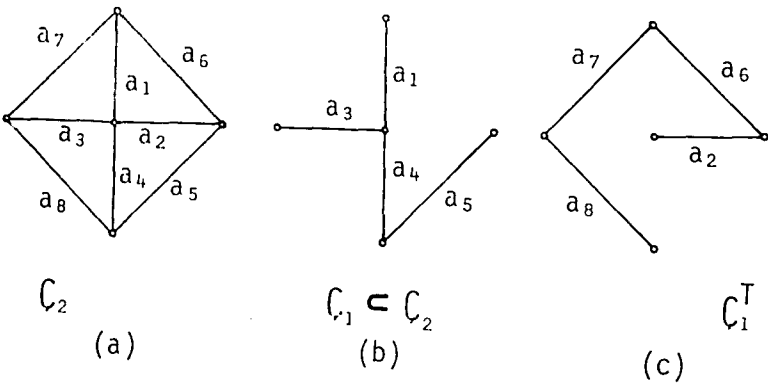


**Tanım 1.1.6**  $C_1 \subset C_2$  koşulunu sağlayan,  $C_1$  ve  $C_2$  çizgeleri için,  $C_1^T = C_2 - C_1$  olarak tanımlanan  $C_1^T$  çizgesine,  $C_1$  in  $C_2$  ye göre tümleneni denir.

Tanım 1.1.6 dan  $C_1, C_2$  nin altçizgesi ise,  $C_1^T$  nin de  $C_2$  nin bir tümleraltçizgesi olduğu anlaşılır. Bu tanımlara göre,

$$\begin{aligned} C_1 \cup C_1^T &= C_2 \\ C_1 \cap C_1^T &= \phi \\ C_1 \oplus C_2 &= C_1^T \end{aligned}$$

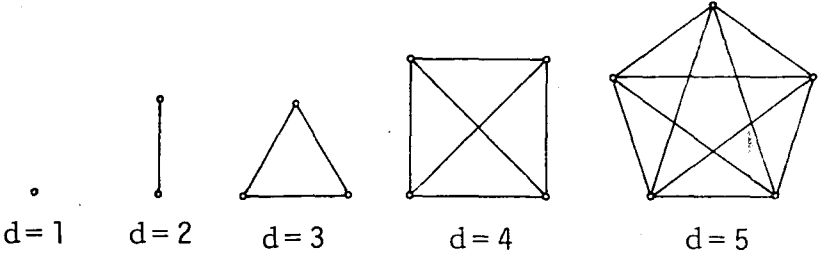
olduğu gözden kaçmamalıdır. Şekil 1.1.7 de,  $C_2$  çizgesinin bir altçizgesi  $C_1$  ve  $C_1$  e ilişkin tümleraltçizgesi  $C_1^T$  gösterilmiştir.



Şekil 1.1.7 Altçizge ve tümleraltçizge kavramlarının açıklanması.

**Tanım 1.1.7** Her düğüm çifti arasında bir ayrıtı bulunan çizgeye dolu çizge denir.

$d$  sayıda düğümü bulunan dolu çizgeyi  $D(d)$  olarak göstereceğiz. Şekil 1.1.8 de, değişik sayıda düğüm içeren dolu çizgelere örnek verilmiştir.  $D(3)$  çizgesine genellikle *üçgen* denir.



Şekil 1.1.8 Dolu çizgelere örnek.

Dolu çizgeler için ayrıtı sayısını,

$$a = \frac{1}{2}d(d - 1)$$

olacağı hemen görülecektir. Öyleyse, yalnız çizgelerin ayrıtı sayısı  $a$ ,

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2}d(d - 1)$$

eşitsizliğini sağlayacaktır.

**Tanım 1.1.8**  $\tilde{C}(d, \tilde{a})$  olarak gösterilen ve  $C(d, a)$  nın,  $D(d)$  ye göre tümleyeni olan çizgeye tümleçizge denir.

Tümleçizgedeki ayrıt sayısı,

$$\tilde{a} = \frac{1}{2}d(d - 1) - a$$

eşitliğinden bulunabilir.

**Tanım 1.1.9**  $\tilde{a} = 0$  olan ve  $T(d)$  simgesi ile gösterilen tümleçizgeye ilkel tümleyen denir.

Dolu çizgenin tümleçizgesi bir ilkel tümleyendir.

**Tanım 1.1.10** Çizgedeki bütün düğümleri içeren altçizgelere kapsar altçizge denir.

ilkel tümleyen bir kapsar altçizgedir. Ayrıca, tümleçizge dolu çizgenin bir kapsar altçizgesi olarak da düşünülebilir.

**Tanım 1.1.11**  $\Delta_0, \Delta$  nın bir altkümesini göstereyin. Uç düğümleri  $\Delta_0$  nın içinde olan ayrıtların tanımladığı ve  $\Pi_{\Delta_0}$  olarak gösterilen altçizgeye  $\Delta_0$  nın ırgittiği ırgitilmiş altçizge denir.

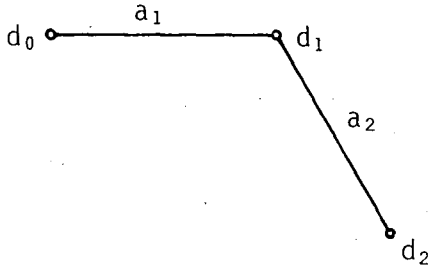
**Tanım 1.1.12** (a) Aralarında bir ayrıt bulunan

düğümler bitişiktir.

(b) Ortak bir düğümü bulunan

ayrıntlar bitişiktir.

Örneğin, Şekil 1.1.9 da  $a_1$  ve  $a_2$  ayrıntları;  $d_1$  ve  $d_2$  düğümleri bitişiktir.



Şekil 1.1.9 Bitişiklik.

**Tanım 1.1.13**  $d_i$  düğümüne bitişik olan düğümlerin tanımladığı  $\Omega_i$  düğüm kümesine,  $d_i$  düğümünün yöresi denir.

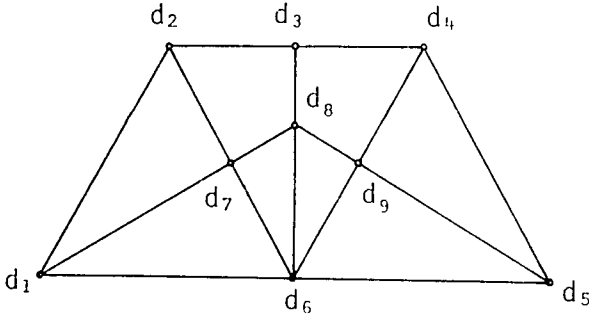
**Tanım 1.1.14**  $\tilde{\Omega}_i = \Omega_i \cup d_i$  olarak tanımlanan düğüm kümesine,  $d_i$  düğümünün kapalı, yöresi denir.

$d_i$  düğümünün yöresinin ırgittiği altçizgeyi  $\Pi_{\Omega_i}$  simgesi ile göstereceğiz. Bu kavramları açıklamak için, Şekil 1.1.10a daki çizgeyi düşünelim.  $d_8$  düğümüne göre,

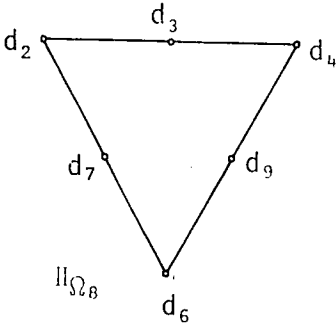
$$\Omega_8 = (d_2, d_3, d_4, d_6, d_7, d_9)$$

$$\tilde{\Omega}_8 = (d_2, d_3, d_4, d_6, d_7, d_8, d_9)$$

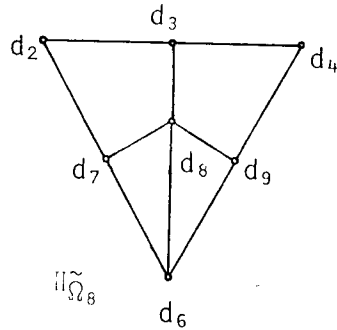
$\Omega_8$  ve  $\tilde{\Omega}_8$  in irgittiği altçizgeler sırasıyla, Şekil 1.1.10b ve c de gösterilmiştir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 1.1.10 Yöre ve irgitilmiş altçizgenin açıklanması.

## 1.2 YOL VE ÇEVRE

*yol* ve *çevre* kavramlarını vermeden önce, bunlara temel oluşturan *dolaşı* ve *gezi* kavramlarını açıklayacağız.

**Tanım 1.2.1**  $\zeta(d,a)$  çizgesindeki düğümlerin bir altkümesi, her düğüm istenildiği kadar yinelenerek

$$(d_0, d_1, \dots, d_n)$$

biçiminde dizilsin öyle ki,

$1 \leq i \leq n$  için,  $d_{i-1}$  ve  $d_i$  düğümleri arasında bir  $a_j$  ayrıtı bulunsun. Bu düğüm dizisine ilişkin  $a_j$  ayrıtılarının oluşturduğu

$$D_{1..n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

dizisine,  $\zeta(d,a)$  çizgesi içindeki bir dolaşı denir.

Tanım 1.2.1 den, dolaşıda  $a_k$  ayrıtısından ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) birden çok geçilebileceği anlaşılmaktadır. Dolaşıda,  $a_k$  ayrıtısından geçilme sayısına  $a_k$  nin katlı, katları bir ya da birden büyük olan ayrıtlara sırasıyla, tekkatlı ya da çokkatlı ayrıtı diyeceğiz.  $D_{i,j}$  dolaşısında,  $d_i$  ve  $d_j$  düğümlerine, dolaşının uç düğümleri, eğer  $d_i$  ve  $d_j$  özdeş ise dolaşıya kapalı dolaşı ve

kapalı olmayan dolaşılara açık dolaşı  $|D_{i,j}|$  ile göstereceğimiz dolaşıdaki ayrıtların sayısına dolaşının uzunluğu diyeceğiz.

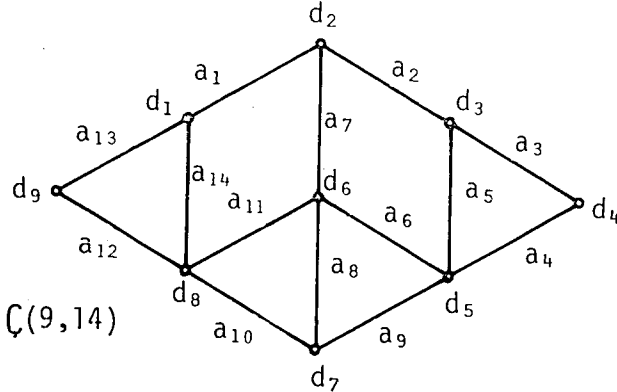
Şekil 1.2.1 deki  $\mathcal{C}(9,14)$  çizgesinde

$$D_{1,5} = (a_1, a_7, a_{11}, a_4, a_1, a_7, a_6, a_5, a_2, a_7, a_8, a_9, a_4, a_4)$$

uç düğümleri  $d_1$  ve  $d_5$ , uzunluğu ise 14 olan ve  $a_1, a_2, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{11}, a_{14}$  ayrıtlarından oluşan bir dolaşıdır. Bu dolaşıda;  $a_2, a_5, a_6, a_8, a_9, a_{11}, a_{14}$  tekkatlı;  $a_1, a_4$  2-katlı ve  $a_7$  3-katlı ayrıtlardır.

**Tanım 1.1.2** Yalnız tekkatlı ayrıtlardan oluşan dolaşıya gezi  $(G_{i,j})$  denir.

Dolaşıda olduğu gibi  $G_{i,j}$  gezisi için de; uç düğümler, açık gezi, kapalı gezi ve gezi uzunluğu  $(|G_{i,j}|)$  kavramları benzer olarak tanımlanır.



Şekil 1.2.1 Dolaşının açıklanması.

Şekil 1.2.1 deki  $C(9,14)$  çizgesine göre,

$$G_{1,5} = (a_1, a_7, a_{11}, a_{10}, a_8, a_6, a_4, a_3, a_5)$$

uç düğümleri  $d_1$  ve  $d_5$ , uzunluğu ise 9 olan bir gezidir.

**Tanım 1.2.3** Bir düğüme çakışık olan ayrıtların sayısına, düğümün kertesisi denir.

$d_i$  düğümünün kertesini  $k_i$  ile gösterelim. Her ayrıt yalnız iki düğüme çakışık olabileceğinden,

$$2a = \sum_{i=1}^d k_i$$

eşitliğini hemen yazabiliriz.

**Teorem 1.2.1** Bir çizgede, kertesisi teksayı olan düğümlerin sayısı çiftsayıdır.

*Tanıt:*

Kertesisi  $i$  olan düğümlerin sayısını  $t_i$  ile gösterirsek,

$$\begin{aligned} 2a &= \sum_{(i)} k_i \\ &= 1t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \dots + nt_n \end{aligned}$$

buradan da,

$$2a - 2t_2 - 2t_3 - \dots = 1t_1 + 1t_3 + \dots$$



yazabiliriz. Bu son eşitliğin sol yanı çiftsayı olduğu için, sağ yanı da çiftsayı olmalıdır. ■

Dolaşının bir altçizge olmamasına karşın, gezi  $\mathcal{C}(d,a)$  içinde bir altçizge tanımlar. Gezinin tanımladığı altçizgede, uç düğümlerinin kerteleri teksayıya, iç düğümlerinin (uç düğümlerinin dışında kalan düğümlerin) kerteleri ise çiftsayıya eşittir.

**Tanım 1.2.4** İç düğümlerinin kertesi 2, uç düğümlerinin kertesi 1 olan geziye yol ( $Y_{ij}$ ) denir.

Dolaşı ve gezide olduğu gibi, yoldaki ayrıtların sayısına yol uzunluğu ( $|Y_{ij}|$ ) diyeceğiz.

**Tanım 1.2.5** Üç düğümleri çakışık olan yola (kapalı yol) çevre ( $\mathcal{C}$ ) denir.

Şekil 1.2.1 deki çizgede,

$$Y_{1,5} = (a_1, a_7, a_6)$$

$$Y_{1,5} = (a_{13}, a_{12}, a_{10}, a_8, a_6)$$

$d_1$  ve  $d_5$  düğümleri arasında, sırasıyla 3 ve 5 uzunlukta iki ayrı yoldur.

$$\mathcal{C}_1 = (a_1, a_2, a_5, a_6, a_{11}, a_{14})$$

$$\mathcal{C}_2 = (a_1, a_7, a_{11}, a_{14})$$

$$\mathcal{C}_3 = (a_2, a_5, a_6, a_7)$$

ise bu çizgedeki çevrelerden üçüdür. Bu örnekte,

$$\zeta_1 = \zeta_2 \oplus \zeta_3$$

eşitliği gözden kaçmamalıdır. Bu ilginç özelliğe 3. Bölümde ayrıntıları ile eğileceğiz.

### 1.3 KERTE DİZİSİ VE GERÇEKLEŞTİRİMİ

Çizgedeki düğümlerin kertelerini düğüm kerte, matrisi diye adlandıracağımız köşegen bir matrisle,

$$K_d = \begin{bmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_2 & & \\ & 0 & \dots & \\ & & & k_d \end{bmatrix}$$

olarak gösterebiliriz.  $K_d$  matrisini oluşturan  $k_j$  lerin tamsayı olduğunu biliyoruz. Ayrıca,

$$0 \leq k_j \leq d - 1$$

ve

$$\sum_{(i)} k_j = 2a$$

koşulları da sağlanmaktadır. Düğümleri yeniden adlandırarak kerteleri,

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_d$$

eşitsizliklerini sağlayacak biçimde sıralayabiliriz. Öyleyse, çizgeye ilişkin kerte bu sıralamaya göre,

$$S : (k_1, k_2, \dots, k_d)$$

biçiminde bir dizi ile gösterilebilir.

**Tanım 1.3.1** Bir çizgenin düğüm kerteleri olarak

tanımlanabilecek tamsayılar dizisine düğümsel dizi denir.

Düğümsel dizi kavramını böylece açıkladıktan sonra, bir tamsayılar dizisinin hangi koşullar altında düğümsel dizi olacağı ve nasıl gerçekleştirileceği sorununa eğilelim.

**Teorem 1.3.1**  $k_1 \geq 1$  ve  $d \geq 2$  koşulunu sağlayan  $S : (k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_d)$  tamsayılar dizisinin düğümsel olabilmesi için yeter ve gerek koşul,

$S : (k_2-1, k_3-1, \dots, k_{k_1+1}-1, k_{k_1+2}, \dots, k_d)$  dizisinin düğümsel olmasıdır.

*Tanıt:*

*Yeter Koşul*

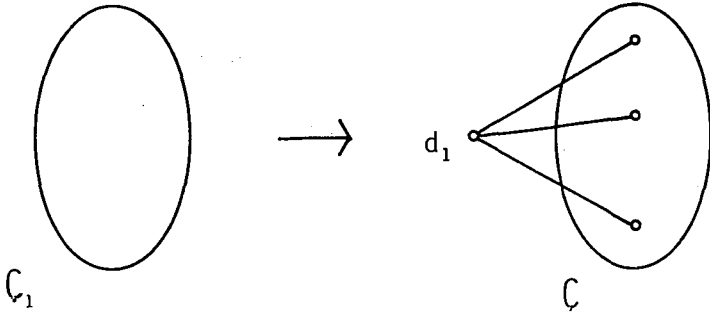
$S_1$  düğümsel ise, bu diziye ilişkin ve düğümleri,

$$d_2^1, d_3^1, \dots, d_d^1$$

olarak sıralanabilen bir  $\mathcal{C}_1$  çizgesi vardır.  $\mathcal{C}_1$  çizgesinde, ilk  $k_1$  düğüme bitişik bir  $d_1$  düğümü ekleyerek,  $S$  ye karşılık gelen  $\mathcal{C}$  çizgesini gerçekleştirebiliriz (Şekil 1.3.1).

### 1.3 Ketre Dizisi ve Gerçekleştirimi

---



Şekil 1.3.1. Teorem 1.3.1 de yeter koşulun açıklanması

*Gerek Koşul:*

Gerek koşulun tanıtı için, incelenmesi gerekli iki durum ortaya çıkmaktadır.

*Durum 1:*

S dizisine ilişkin bir  $\zeta$  çizgesi olsun. Öyleyse kertesini  $k_1$  olan bir  $d_0$  düğümü vardır ve

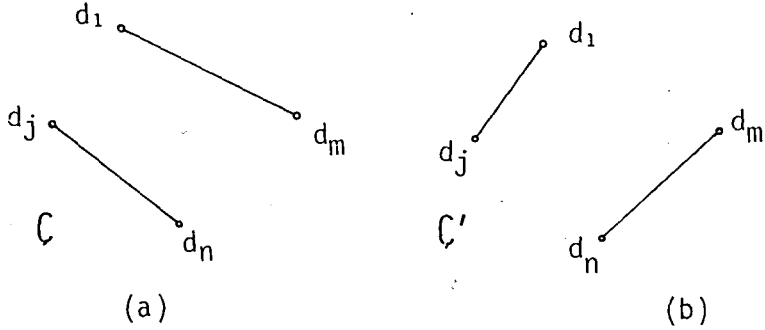
$$\zeta_1 = \zeta - (d_0)$$

olarak tanımlanan çizgenin kerte dizisi  $S_1$  dir.

*Durum 2:*

$\zeta$  de, Durum 1 in koşulunu sağlayan bir  $d_0$  düğümü bulunmasın. Başka bir deyişle  $d_1, d_i (2 \leq i \leq k_1+1)$  düğümlerinin tümüne bitişik olmasın. Öyleyse kerteleri  $k_j > k_m$  koşulunu sağlayan,  $d_1$  e bitişik  $d_m$  ve  $d_1$  e bitişik olmayan  $d_j$  düğümleri vardır.

$d_j$  nin kertesesi  $d_m$  nin kertesinden büyük olduğu için,  $d_j$  ye bitişik olan ama  $d_m$  ye bitişik olmayan bir  $d_n$  düğümü de vardır (Şekil 1.3.2a).  $\zeta$  den  $(d_1, d_m)$  ve  $(d_j, d_n)$  ayrıtları çıkarılıp yerine  $(d_1, d_j)$  ve  $(d_m, d_n)$  ayrıtlarının eklenmesi ile elde edilen  $\zeta'$  çizgesinin kerte dizisi,  $\zeta$  nin kerte dizisine özdeştir. (Şekil 1.3.2b). Ayrıca, bu değiştirme işlemi sonucu,  $\zeta'$  çizgesindeki  $d_1$  düğümüne bitişik düğümlerin kertelerinin toplamı,  $\zeta$  çizgesindeki  $d_1$  düğümüne bitişik düğümlerin kertelerinin toplamına göre daha büyüktür.



Şekil 1.3.2 Teorem 1.3.1, Durum 2 de gerek koşulun açıklanması

Öyleyse, yukarda açıkladığımız bu ayrıtların yerdeğiştirme işlemi yeterince yinelenerek, Durum 1 deki koşulu sağlayan bir çizge her zaman elde edilecektir. ■

Verilen tamsayılar dizisini, eğer olanağı varsa, bir çizge ile gerçekleştirmek için Teorem 1.3.1 den

### 1.3 Ketre Dizisi ve Gerçekleştirimi

---

nasıl yararlanılacağını bir örnek üzerinde açıklayalım.

$$S : ( 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2 )$$

verilen tamsayılar dizisi olsun. Teorem 1.3.1 de açıklanan işlemin yeterince uygulanması,

$$S : ( 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2 )$$

$\uparrow \quad \text{-----} \quad \uparrow$   
 $k_1=4$

$$S_1^1 : ( 3, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 2 )$$

$$S_1 : ( 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2 )$$

$\uparrow \quad \text{-----} \quad \uparrow$   
 $k_1=3$

$$S_2=S_2^1 : ( 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 )$$

$\uparrow \quad \text{-----} \quad \uparrow$   
 $k_1=2$

$$S_3^1 : ( 1, 1, 2, 2, 2, 2 )$$

$$S_3 : ( 2, 2, 2, 2, 1, 1 )$$

$\uparrow \quad \text{-----} \quad \uparrow$   
 $k_1=2$

$$S_4^1 : ( 1, 1, 2, 1, 1 )$$

$$S_4 : ( 2, 1, 1, 1, 1 )$$

$\uparrow \quad \text{-----} \quad \uparrow$   
 $k_1=2$

$$S_5^1 : ( 0, 0, 1, 1 )$$

## 1. BÖLÜM

---

$$S_5: ( 1, 1, 0, 0 )$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \hline \end{array}$$

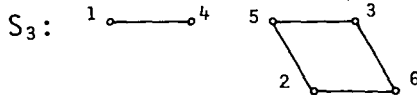
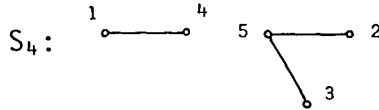
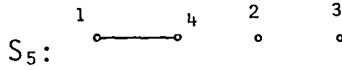
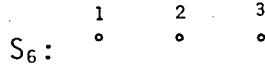
$$k_1=1$$

$$S_6: ( 0, 0, 0 )$$

ile sonuçlanacaktır.  $S_6$  nın düğümsel olduğu hemen görülebilir. Öyleyse,  $S_6$  dan başlayarak aranan çizge Şekil 1.3.3 de açıklandığı gibi elde edilebilir.

Bu örnekten de kolayca anlaşılacağı gibi, düğümsel bir dizinin gerçekleştirimi *birik* değildir.

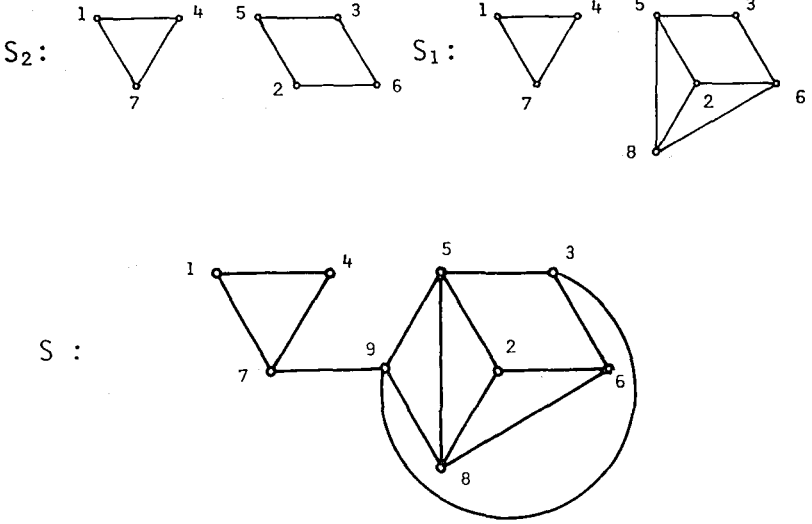
Örneğin, Şekil 1.2.1 ve Şekil 1.3.3 deki çizgelerin kerte dizilerinin özdeş olmasına karşın,





### 1.3 Ketre Dizisi ve Gerçekleştirmi

---



şekil 1.3.3 S tamsayılar dizisinin gerekleştirmi

bu izgeler arasında başka herhangi bir ilişki yoktur.

## 1.4 BAĞLI ÇIZGELER

Çizgelerdeki önemli özelliklerden biri de *bağlı* olma durumudur. Bağlı çizgeleri aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

**Tanım 1.4.1** Her düğüm çifti arasında en az bir yol bulunan çizgelere bağlı çizge denir.

**Tanım 1.4.2** Bağlı olmayan çizgelere parçalı çizge denir.

**Tanım 1.4.3** Bir çizgenin kendi arasında bağlı olan ve olabildiğince çok sayıda ayrıtı içeren altçizgelerinden her birine parça denir.

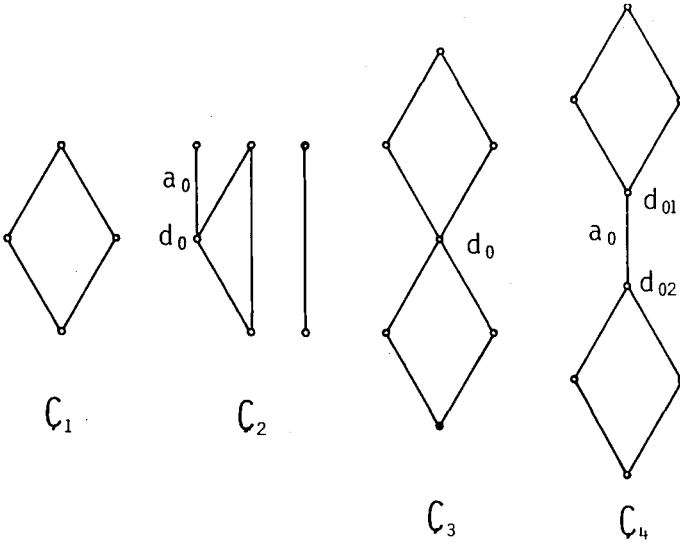
$(d,a)$  daki parça sayısını  $p$  ile göstereceğiz. Her bir parça, tek başına bağlı bir çizge gibi düşünülebileceğinden, başkaca belirtilmedikçe, yalnız bağlı çizgeleri incelememiz genellemeden birşey yitirmeyecektir.

**Tanım 1.4.4** Bir çizgede, aralarında tanımlanabilecek her yolun içermesi gerektiği bir  $d_0$  düğümü olan iki düğüm varsa,  $d_0$  bir eklem düğümü dür.

**Tanım 1.4.5** Uç düğümleri eklem düğümü olan ayrıtlara köprü denir.

**Tanım 1.4.6** Uç düğümlerinden yalnız biri eklem düğümü olan ayrıta sap denir.

Tanım 1.4.4 - 1.4.6 dan, her çizgede bir eklem düğümü köprü ya da sapın bulunmasının gerekmediği anlaşılır. Şekil 1.4.1 de bu kavramlara örnekler verilmiştir.  $\zeta_1$ ,  $\zeta_3$ ,  $\zeta_4$  bağlı;  $\zeta_2$  ise parçalı



Şekil 1.4.1 Bağlı ve parçalı çizge ile eklem düğümü sap ve köprü kavramlarının açıklanması

çizgedir.  $\zeta_2$  nin iki parçası vardır ve  $a_0$  ayrıta bir sap  $d_0$  düğümü ise bir eklem düğümüdür.  $\zeta_3$  ve  $\zeta_4$  deki  $d_0$  ve  $d_{01}$ ,  $d_{02}$  eklem düğümleridir.  $\zeta_4$  deki  $a_0$  bir köprüdür.  $\zeta_1$  de köprü ya da eklem düğümü yoktur. Sap ya da köprü olan ayrıtların bir çevrenin içinde bulunamayacağı gözden kaçmamalıdır.

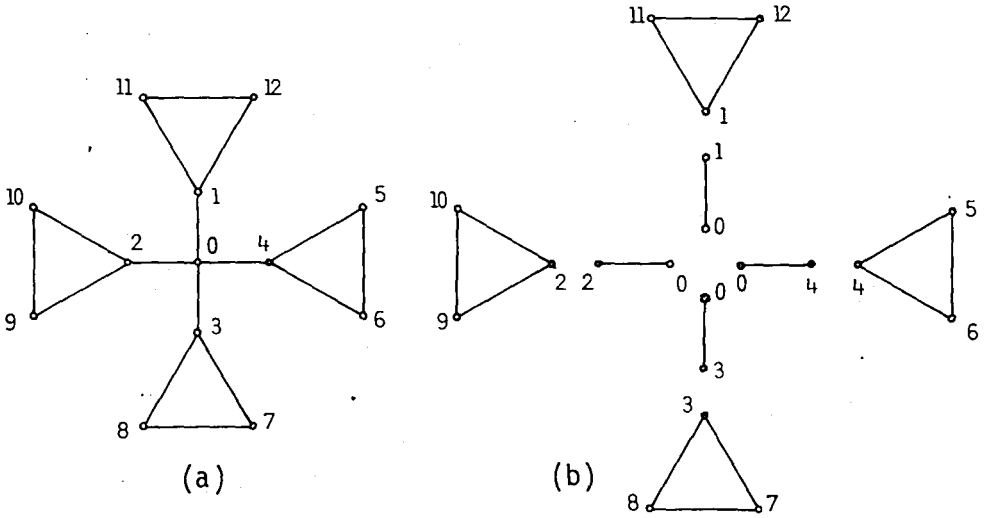
## 1. BÖLÜM

Bu nedenlerle, sap ya da köprü olan ayrıtlara çevre dışı ayrıtlar, bu tür ayrıtların dışında kalan ayrıtlara ise çevresel ayrıtlar diyeceğiz.

**Tanım 1.4.7** Eklem düğümlerini içermeyen çizgelere çevresel bağlı çizge denir.

**Tanım 1.4.8** Eklem düğümlerini içeren çizgelere parçalanabilir çizge denir.

Parçalanabilir olmayan çizgelere parçalanamaz çizge diyeceğiz. Parçalanabilir çizgelerin, eklem düğümlerinden koparılması ile altparçalara parçalanmasına, çizgenin öbeklerine parçalanması diyeceğiz. Örneğin Şekil 1.4.2a daki çizge, eklem düğümlerinden koparılarak, Şekil 1.4.2b de gösterildiği gibi 8 öbeğe parçalanabilir.



Şekil 1.4.2 Çizgenin öbeklerine parçalanması

**Tanım 1.4.9**  $\text{öb}(\zeta)$  olarak gösterilen, çizgedeki öbeklerin sayısına, çizge öbek, sayısı denir.

**Tanım 1.4.10**  $\text{öb}(d_i)$  olarak gösterilen,  $d_i$  düğümünün ilgili bulunduğu öbeklerin sayısına, düğüm öbek, sayısı denir.

Örneğin, Şekil 1.4.2a da verilen çizge için,

$$\text{öb}(\zeta) = 8$$

$$\begin{array}{llll} \text{öb}(d_0) = 4 & \text{öb}(d_1) = 2 & \text{öb}(d_2) = 2 & \text{öb}(d_3) = 2 \\ \text{öb}(d_4) = 2 & \text{öb}(d_5) = 1 & \text{öb}(d_6) = 1 & \text{öb}(d_7) = 1 \\ \text{öb}(d_8) = 1 & \text{öb}(d_9) = 1 & \text{öb}(d_{10}) = 1 & \text{öb}(d_{11}) = 1 \\ \text{öb}(d_{12}) = 1 & & & \end{array}$$

olduğu görülebilir. Çizgedeki öbek sayıları ile ilgili aşağıdaki teoremi tanıtlamadan vereceğiz.

**Teorem 1.4.1** Çizgedeki çizge öbek, düğüm öbek ve parça sayıları,

$$\text{öb}(\zeta) = p + \sum_{(i)} \left[ \text{öb}(d_i) - 1 \right]$$

eşitliğini sağlar.

Teorem 1.4.1 in doğruluğu, Şekil 1.4.2a daki çizgeden ( $p = 1$ ) hemen görülecektir.

## 1.5 UZAKLIK VE ÖZEK

Bu altbölümde yalnız bağlı çizgeleri düşüneceğiz.  $d_i$  ve  $d_j$  böyle bir çizgenin iki düğümü olsun. Çizgeye bağlı olduğu için bu düğüm çifti arasında en az bir yol vardır.  $d_i$  ve  $d_j$  düğümleri arasındaki yolların oluşturduğu,

$$\{Y_{i,j}\} = \{Y_{i,j}^1, Y_{i,j}^2, \dots, Y_{i,j}^n\}$$

yollar yağını düşünelim.

**Tanım 1.5.1**  $\{Y_{i,j}\}$  yağında  $u(d_i, d_j)$  olarak gösterilen en kısa yolun uzunluğuna,  $d_i$  düğümünün  $d_j$  düğümüne uzaklığı denir.

$d_i$ ,  $d_j$  ve  $d_k$  çizgedeki üç düğüm olsun. Tanım 1.5.1 den,

- a)  $u(d_i, d_j) \geq 0$
- b) Eğer ve ancak  $d_i = d_j$  ise,  
 $u(d_i, d_j) = 0$
- c)  $u(d_i, d_j) = u(d_j, d_i)$
- ç)  $u(d_i, d_k) + u(d_k, d_j) \geq u(d_i, d_j)$

olduğu görülebilir. Her düğüm için uzaklığın alabileceği bir enbüyük değer vardır.

**Tanım 1.5.2**  $\alpha(d_j) = \text{enbüyük } \{u(d_i, d_j)\}$   
(j)

olarak gösterilen,  $d_j$  düğümüne ilişkin uzaklığın alabileceği enbüyük değere,  $d_j$  düğümünün açıklığı denir.

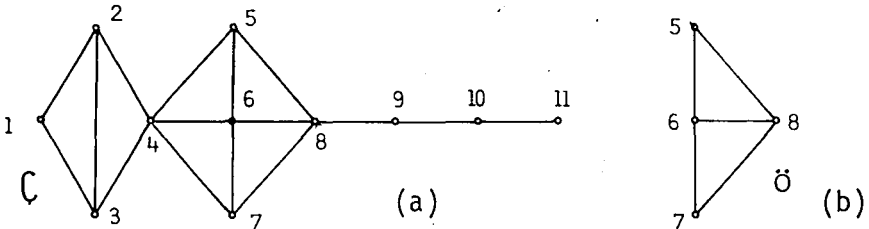
**Tanım 1.5.3**  $\sigma = \text{enküçük } \{\alpha(d_i)\}$   
(i)

olarak tanımlanan, çizgedeki enküçük düğüm açıklığına, çizgenin yarıçapı  $\sigma$  denir.

Genellikle bir çizgede açıklığı çizgenin yarıçapına eşit birden çok düğüm vardır.

**Tanım 1.5.4**  $\mathcal{O}$  ile gösterilen ve açıklıkları yarıçapa eşit olan düğümlerin irgittiği altçizgeye, çizgenin özeği, özeği oluşturan düğümlere özek düğümleri denir.

**Tanım 1.5.5** Özek düğümlerinden başlayan  $\sigma$  uzunluktaki yollara yarıçapsal yol denir.



Şekil 1.5.1 Açıklık, yarıçap ve özek

Şekil 1.5.1a daki çizgeye ilişkin düğüm açıkları:

$$\begin{aligned}\alpha(d_1) &= 7 & \alpha(d_2) &= 6 & \alpha(d_3) &= 6 & \alpha(d_4) &= 5 \\ \alpha(d_5) &= 4 & \alpha(d_6) &= 4 & \alpha(d_7) &= 4 & \alpha(d_8) &= 4 \\ \alpha(d_9) &= 5 & \alpha(d_{10}) &= 6 & \alpha(d_{11}) &= 7\end{aligned}$$

Öyleyse, çizgenin yarıçapı  $\sigma = 4$ , özek düğümleri ise  $d_5, d_6, d_7, d_8$  dir. Bu çizgenin özeği Şekil 1.5.1b de gösterilmiştir.  $(d_6, d_4, d_3, d_2, d_1)$  düğümleri bir yarıçapsal yol tanımlar.

**Tanım 1.5.6**  $\Phi = \text{enbüyük}_{(i)} \{\alpha(d_i)\}$

olarak tanımlanan enbüyük düğüm açıklığına çizgenin çapı denir.

Tanım 1.5.3 ve 1.5.6 dan, yarıçap ve çap arasında

$$\sigma \leq \Phi \leq 2\sigma$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu görülebilir. Şekil 1.5.1 deki çizgenin çapı 7 dir. Dolu çizgelerin kendileri bir özektir ve bu tür çizgeler için  $\sigma = \Phi = 1$ .

Yarıçap ve enbüyük kerte değeri  $K$ , çizgede olabilecek düğümlerin sayısına bir üstkısıt getirmektedir.

**Teorem 1.5.1**  $\mathcal{C}(d, a)$  daki düğümlerin enbüyük kertesini  $K$  ise,



$$d \leq \frac{1}{k-1} (k^{\sigma+1} - 1)$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizlik ancak dolu çizgeler için eşitliğe dönüşür.

*Tanıt*

$d_{\sigma}$ , çizgenin özek düğümlerinden biri olsun.  $d_{\sigma}$  ye birim uzaklıkta en çok  $k$  düğüm vardır. Bu düğümleri  $d_{1i}$  ( $1 \leq i \leq k$ ) olarak gösterelim.  $d_{1i}$  düğümüne de birim uzaklıkta en çok  $k$  düğüm vardır. Öyleyse  $d_{\sigma}$  özek düğümüne 2 uzaklıkta en çok  $k^2$  düğüm vardır. Demek ki,

$$d \leq 1 + k + k^2 + \dots + k^{\sigma} = \frac{1}{k-1} (k^{\sigma+1} - 1)$$

aradığımız genel sonuçtur.

Dolu çizgeler için,

$$\sigma = 1 \quad \text{ve} \quad d = k + 1$$

olacağından, eşitsizlik ancak dolu çizgeler için eşitliğe dönüşecektir. ■

Çizgedeki uzaklıklar bir matris ile de gösterilebilir.

**Tanım 1.5.7**  $d \times d$  boyutundaki uzaklık matrisi

$$U = |u_{ij}|_{d,d}$$

$$u_{ij} = u(d_i, d_j)$$

olarak tanımlanır.

Bu tanımdan yararlanarak, uzaklık matrisinin özelliklerini aşağıdaki gibi sıralayabiliriz

**Teorem 1.5.2**  $U$  matrisinin uzaklık matrisi olabilmesi için gerek ve yeter koşullar aşağıdadır.

- a)  $U = U'$  (bakışımlılık)
- b) bütün  $i$  ve  $j$  ler için,  $u_{ij}$  eksi olmayan bir tamsayıdır,
- c)  $u_{ii} = 0$
- c) bütün  $i, j$  ve  $k$  ler için,  
 $u_{ij} \leq u_{ik} + u_{kj}$
- d) her  $u_{ij} > 1$  için,  
 $u_{ij} = u_{ik} + u_{kj}$   
koşulunu sağlayan bir  $d_k$  düğümü vardır.

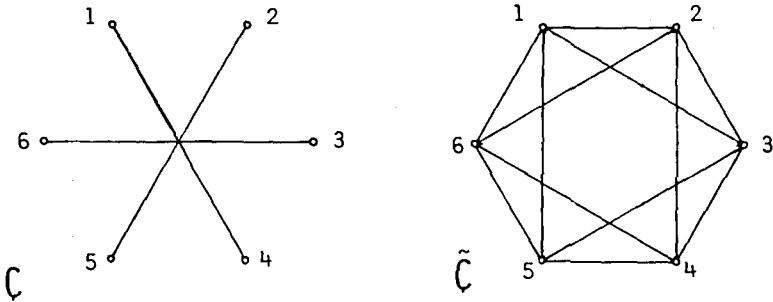
a)da  $U', U$  matrisinin evriğini göstermektedir. Teoremin gerek olduğu hemen görülebilir. Bu koşulların,  $U$  matrisinin bir çizge ile gerçekleştirilmesi için yeter koşul olduğunu da

gösterebiliriz (Okuyucu bu koşulların sağlandığı matrisi gerçekleştirmek için bir yöntem geliştirmeye çalışmalıdır).

## 1.6 RAMSEY SAYILARI

'Altı kişiden oluşan herhangi bir toplulukta, ya birbirini tanıyan ya da tanımayan en az 3 kişi vardır' yargısını tanımlayabilir misiniz?

İşte bu soru, çizge kuramında *Ramsey sayısı* diye adlandırılan bir özelliğin çıkmasına neden olmuştur. Altı kişiden oluşan bir topluluktaki kişileri düğümler ve kişiler arasındaki tanışıklığı da ilgili düğümler arasındaki ayrıtlar ile gösterirsek, bu soruyu: '6 düğümden oluşan  $\mathbb{C}$  çizgesinde ya da  $\tilde{\mathbb{C}}$  tümleçizgesinde en az bir üçgen olduğunu gösteriniz' diye de sorabiliriz. Örneğin, Şekil 1.6.1a'daki çizgeyi düşünelim. Her ne kadar  $\mathbb{C}$  de bir üçgen yoksa da, Şekil 1.6.1b'de gösterilen  $\tilde{\mathbb{C}}$  de bir çok üçgen vardır ( $\tilde{\mathbb{C}}$  de bulunan üçgenleri sayınız). Bu durumun 6 düğümlü bütün çizgeler için geçerli



Şekil 1.6.1 Altı kişiden oluşan bir topluluk

## 1.6 Ramsey Sayıları

---

olduğunu gösterebiliriz.

Kendisinde ya da tümleçizgesinde en az bir  $D(m)$  ya da  $D(n)$  içeren çizgenin düğüm sayısını  $R(m,n)$  ile gösterelim.

**Tanım 1.6.1** Bir  $m, n$  tamsayı çifti için,  $R(m,n)$  nin bulunabilecek en küçük değerine Ramsey sayısı denir.

Bu tanımdan,

$$R(m,n) = R(n,m)$$

olduğu hemen görülür. Ramsey sayılarının bulunması, çizge kuramındaki açık sorunlardan biridir. Çizelge 1.6.1 de bilinen bazı Ramsey sayıları gösterilmiştir.

Çizelge 1.6.1 Bilinen Bazı Ramsey Sayıları

m \ n	2	3	4	5	6	7
2	2	3	4	5	6	7
3	3	6	9	14	18	23
4	4	9	18	?	?	?
5	5	14	?	?	?	?
6	6	18	?	?	?	?
7	7	23	?	?	?	?

Ayrıca,

$$R(1,n) = R(m,1) = 1$$

$$R(2,n) = n$$

$$R(m,2) = m$$

olduğunu da gösterebiliriz. Ancak,  $m$  ve  $n$  nin değerleri büyüdükçe, Ramsey sayılarının bulunması da oransız olarak zorlaşmaktadır. Ramsey sayıları için bir üstkısıt, aşağıdaki gibi verilebilir.

**Teorem 1.6.1** Ramsey sayıları,

$$R(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$$

eşitsizliğini sağlar.

*Tanıt*

Teoremi tümevarımla tanıtlayacağız.

$$\binom{a}{b} \triangleq \frac{a!}{b! (a-b)!}$$

olduğunu biliyoruz.

$$t = m + n$$

diyelim. Teoremin  $m = 1,2$  ve gelişi güzel bir  $n$  için ya da  $n = 1,2$  ve gelişi güzel bir  $m$  için doğru olduğunu kolayca görebiliriz. Öyleyse Teorem  $t \leq 4$  için de doğrudur. Teoremin,

## 1.6 Ramsey Sayıları

---

$$m' + n' < t$$

ve

$$t > 4$$

koşulu altında  $m'$  ve  $n'$  gibi iki değer için de doğru olduğunu varsayalım. Demek ki,

$$R(m', n') \leq \binom{m' + n' - 2}{m' - 1}$$

Ayrıca bu  $t$  değeri için,

$$m + n = t$$

olsun ve genellemeden bir şey yitirmeksizin,

$$m \geq 3 \quad \text{ve} \quad n \geq 3$$

diyelim. Öyleyse tümevarımı  $(m-1) + n$  ve  $m + (n-1)$  için uygularsak

$$R(m-1, n) \leq \binom{m + n - 3}{m - 2}$$

ve

$$R(m, n-1) \leq \binom{m + n - 3}{m - 1}$$

yazabiliriz. Ancak,

$$\binom{m+n-3}{m-2} + \binom{m+n-3}{m-1} = \binom{m+n-2}{m-1}$$

olduğundan,

$$R(m,n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$$

eşitsizliğinin doğruluğunu göstermemiz yeterlidir.

Ç,

$$\binom{m+n-2}{m-1}$$

sayıda düğümü olan bir çizgeyi gösterebiliriz.  $m > 2$  olduğu için,

$$\binom{m+n-2}{m-1} > n$$

dir. Eğer Ç ayrıtırsanız bir çizge ise, çizgede  $n$  sayıda bağımsız düğüm var demektir. Öyleyse, çizgede ayrıtıların da bulunduğunu varsayabiliriz.

$d_j$ , kertesiz sıfırdan büyük bir düğümü gösterebiliriz ( $k_j > 0$ ).  $\tilde{\Omega}_j$ ,  $d_j$  düğümünün kapalı yöresini ve  $\Delta$ , çizgedeki düğüm kümesini,  $W$  ise,

$$W = \Delta - \tilde{\Omega}_j$$

olarak tanımlanan düğümleri gösterebiliriz. Öyleyse, önümüzde incelenmesi gerekli iki durum vardır.



## 1.6 Ramsey Sayıları

---

*Durum 1*

$$k_i \geq R(m - 1, n)$$

$\Omega_i$  nin ( $d_i$  düğümünün yöresi) ırgittiği altçizge  $\Pi_{\Omega_i}$  de ya  $m - 1$  sayıda bitişik ya da  $n$  sayıda bitişik olmayan düğüm vardır.

Eğer ikinci seçenek doğru ise,  $\mathcal{C}$  de  $n$  bitişik olmayan düğüm var demektir.

Eğer bu seçenek doğru değilse,  $\tilde{\Omega}_i$  nin ırgittiği altçizge  $\Pi_{\tilde{\Omega}_i}$  de ve  $\mathcal{C}$  de  $m$  düğümden oluşan bir dolu çizge vardır.

Demek ki, ya  $\mathcal{C}$  içinde  $D(m)$  ya da  $\tilde{\mathcal{C}}$  içinde  $D(n)$  bir altçizge olarak bulunacaktır.

*Durum 2*

$|W|$ ,  $W$  kümesindeki düğümlerin sayısını gösteriyorsa

$$k_i < R(m - 1, n) \\ R(m - 1, n) + R(m, n - 1) \leq \binom{m + n - 2}{m - 1}$$

eşitsizliği,

$$|W| \geq R(m, n - 1)$$

koşulunu önerecektir.

Eğer  $\Pi_W$  de bitişik olmayan  $m$  düğüm varsa, bu  $\checkmark$  için de doğrudur. Eğer böyle bir durum söz konusu değilse,  $\Pi_W$  içinde bitişik olmayan  $n - 1$  düğüm vardır, bu da  $\Pi_W \cup D_j$  ve  $\checkmark$  içinde bitişik olmayan  $n$  düğüm bulunduğu anlamına gelir. Demek ki ya  $\checkmark$  içinde  $D(m)$  ya da  $\checkmark$  içinde  $D(n)$  bir altçizge olarak bulunacaktır. Bu gözlemden, aradığımız sonuç tümevarımla elde edilir. ■

Teorem 1.6.1 e benzer olarak aşağıdaki teoremi de tanımlayabiliriz.

**Teorem 1.6.2**  $n \geq 2$  için Ramsey sayıları,

$$R(3, n) \leq \frac{n^2 + 3}{2}$$

eşitsizliğini sağlar.

Bu teoremlerin uygulanmasına ilişkin aşağıdaki örnekleri düşünelim.

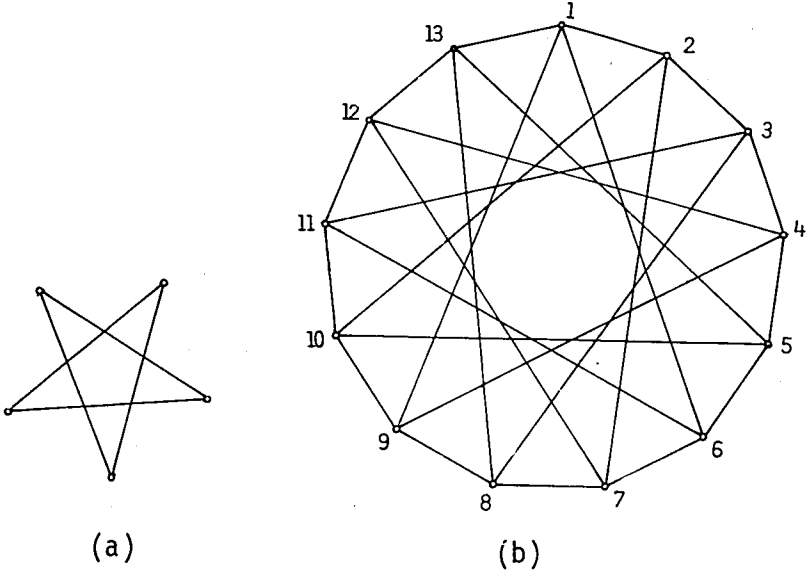
$m = n = 3$  için, Teorem 1.6.1

$$R(3,3) \leq \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

verecektir. Ancak Şekil 1.6.2a da gösterildiği gibi, ne kendisi ne de tümlerçizgesi üçgen içermeyen 5 düğümlü bir çizge bulunduğundan, teoremdeki eşitsizlik, eşitliğe dönüşecektir.

## 1.6 Ramsey Sayıları

---



Şekil 1.6.2  $R(3,3) = 6$  ve  $R(3,5) = 14$  olduğunu gösteren çizgeler.

Benzer olarak,  $m = 3$  ve  $n = 5$  için, Teorem 1.6.1

$$R(3,5) \leq \binom{6}{2} = \frac{6!}{2! 4!} = 15$$

Teorem 1.6.2 ise,

$$R(3,5) \leq \frac{28}{2} = 14$$

verecektir. Demek ki,  $R(3,5) \leq 14$  dür. Ancak, ,

Şekil 1.6.2b de gösterilen ve ne kendisi ne de tümlerçizgesi 3 ya da 5 düğümlü dolu bir çizge içermeyen, 13 düğümlü bir çizge bulunduğundan, bu durumda da Teorem 1.6.2 deki eşitsizlik, eşitliğe dönüşecektir.

Kısaca açıkladığımız Ramsey sayılarının, konuya girerken sözünü ettiğimiz altı kişilik topluluğa ilişkin yargının ışığı altında, özellikle toplumbilim dalında uğraşan okuyucularımızca, ilginç uygulamalarının bulunacağını umarız.



## 2. BÖLÜM

### ÇİZGELER ÜZERİNDE İŞLEMLER VE ÖZEL YAPILI ÇİZGELER

#### 2.1 ÇAKIŞIM İLE İLGİLİ TANIM MATRİSLERİ

1. Bölümde, çizgedeki kerte ve uzaklık gibi özelliklerin birer matris ile gösterilebileceğinden söz etmiştik. Bu altbölümde ise, çizgeyi daha açık bir biçimde tanımlayacak matrisleri inceleyeceğiz. Çizgedeki en temel ilişki *çakışım ilişkisi* olduğu için: düğümlerle ayrıtlar, yalnız düğümler ve yalnız ayrıtlar arasında olmak üzere üç ayrı çakışım matrisi üzerinde duracağız.

**Tanım 2.1.1**  $(d,a)$  çizgesinin  $d$  dizek ve  $a$  dikeçten oluşan,

$$\bar{P} = [P_{ij}]_{d,a} \text{ çakışım matrisi,$$

$a_j$  ayrıtı  $d_i$  düğümüne çakışık ise  $p_{ij} = 1$   $a_j$  ayrıtı  $d_i$  düğümüne çakışık değilse  $p_{ij} = 0$  olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.1 den görüldüğü gibi, çakışım matrisi genellikle dördül olmayan (dikdörtgen) bir matristir. Her ayrıt yalnız iki düğüme çakışabileceğinden (tekçevreleri göz önüne almıyoruz), çakışım matrisinin dikeçlerinde sıfır

## 2.1 Çakışım ile ilgili tanım matrisleri

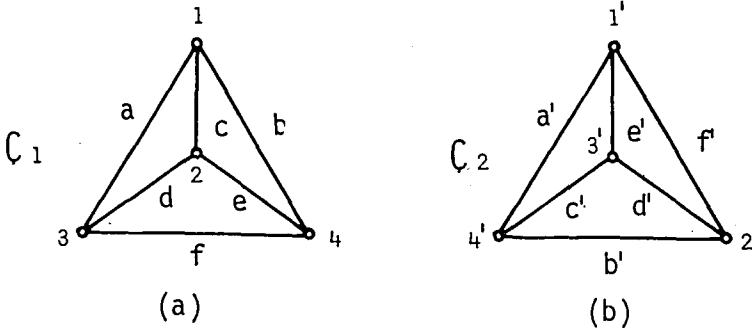
olmayan yalnız iki terim vardır.

**Tanım 2.1.2** Çakışım matrisi  $\bar{P}$  nin, herhangi bir dizeğinin atılması ile elde edilen  $P$  matrisine, indirgenmiş çakışım matrisi denir.

Çizge üzerinde tanımlanabilecek en önemli matris olan çakışım matrisinin ayrıntılı incelenmesini 3. Bölüme bırakacağız.

**Tanım 2.1.3** Düğüm ve ayrıtları arasında, çakışım ilişkisinin sakınıldığı, 1:1 bir karşılıklı eşleme olan çizgelere eşyapılı çizge denir.

Tanım 2.1.3 den, eşyapılı çizgeler için çakışım matrislerinin eşit olacak biçimde yazılabileceği gözden kaçmamalıdır. Şekil 2.1.1 deki  $\zeta_1$  ve  $\zeta_2$  çizgelerinin düğüm ve ayrıtları arasında,



Şekil 2.1.1 Eşyapılı çizgeler.

## 2. BÖLÜM

1	→	1'	a	→	e'
2	→	2'	b	→	a'
3	→	3'	c	→	f'
4	→	4'	d	→	d'
			e	→	b'
			f	→	c'

olduğu gibi bir 1:1 karşılıklıdır. Bu çizgelerin çakışım matrisleri,

$$\bar{P}_1 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ 1 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\bar{P}_2 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccc} a' & b' & c' & d' & e' & f' \\ 1' & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 2' & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 3' & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 4' & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dir.  $\bar{P}_2$  nin dikeçlerinin yeniden düzenlenmesi  $\bar{P}_1$  matrisini verecektir. Demek ki, Şekil 2.1.1 deki  $\zeta_1$  ve  $\zeta_2$  çizgeleri eşyapılıdır.

**Tanım 2.1.4**  $\zeta(d,a)$  çizgesinin  $d$  dizek ve  $d$  dikeçten oluşan,

$$\tilde{D} = [d_{ij}]_{d,d} \text{ düğümlü matrisi,$$



## 2.1 Çakışım ile ilgili tanım matrisleri

---

$i \neq j$  için, eğer  $i$  ninci düğüm  
 $j$  ninci düğüme bitişik ise (bitişik  
değil ise)  $d_{ij} = 1$  (0).  
 $i = j$  için,  $d_{ii} = k_i$  ( $d_i$  ninci  
düğümün kertesi) olarak tanımlanır.

**Tanım 2.1.5**  $\zeta(d,a)$  çizgesinin  $d$  dizek ve  $d$   
dikeçten oluşan,

$$D = |d_{ij}|_{d,d} \text{ indirgenmiş düğüm,}$$

$$D = \bar{D} - K_d \text{ olarak tanımlanır.}$$

İndirgenmiş düğüm matrisinde köşegen öğelerin sıfır  
olduğu gözden kaçmamalıdır. Tanım 2.1.5 de,  $K_d$   
düğüm kerte matrisini göstermektedir. Tanım 2.1.1,  
2.1.4 ve 2.1.5 den,

$$\bar{D} = \bar{D}'$$

$$D = D'$$

matrislerinin bakışumlu olduğu ve

$$\bar{D} = \bar{P} \bar{P}'$$

eşitliği görülebilir (gösteriniz). Düğüm matrisine  
benzer olarak ayrıt matrisi de aşağıdaki gibi  
tanımlanabilir.

**Tanım 2.1.6**  $\zeta(d,a)$  çizgesinin  $a$  dizek ve  $a$   
dikeçten oluşan,

$\bar{A} = [a_{ij}]_{a.a}$  ayrıt matrisi,  
 $i \neq j$  için, eğer  $i$  ninci ayrıt  
 $j$  ninci ayrıtta bitişik ise  
 (bitişik değil ise)  $a_{ij} = 1$  (0)  
 $i = j$  için  $a_{ij} = 2$   
 olarak tanımlanır.

**Tanım 2.1.7**  $(d,a)$  çizgesinin  $a$  dizek ve  $a$   
 dikeçten oluşan,

$\bar{A} = [a_{ij}]_{a.a}$   
indirgenmiş ayrıt matrisi,

$A = \bar{A} - 2I_a$   
 olarak tanımlanır.

İndirgenmiş ayrıt matrisinde köşegen öğelerin sıfır  
 olduğu gözden kaçmamalıdır. Tanım 2.1.7 de  
 $I_a$ ,  $a \times a$  boyutundaki birim matrisi göstermektedir.  
 Yukarda verdiğimiz tanımlardan, bu matrislerin de  
 bakışımli olduğu,

$$\bar{A} = \bar{A}'$$

$$A = A'$$

ve

$$\bar{A} = P'P$$

eşitliği görülebilir (gösteriniz). Şekil 2.1.1a  
 daki çizgeye ilişkin düğüm ve ayrıt matrisleri

## 2.1 Çakışım ile ilgili tanım matrisleri

---

$$\bar{D} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ve

$$\bar{A} = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Sıfır ve birlerden oluşan bir matrisin, çakışım ya da indirgenmiş çakışım matrisi olabilmesi için gerek ve yeter koşul, matrisin her dikecinde sıfır olmayan (bir olan) en çok iki terimin bulunmasıdır. Köşegen dışı terimleri sıfır ve birlerden oluşan bakışumlu dördül bir matrisin, düğüm matrisi olabilmesi için gerek ve yeter koşul, köşegen terimlerinin bütün  $i$  ler için,

$$a_{ii} = \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} a_{ij}$$

eşitliğini sağlamasıdır. Bu koşulları sağlayan matrislerin gerçekleştirilmesinin bir sorun olmayacağı açıktır.. Ancak, ayrıt matrisi için durum böylesine açık değildir. Sıfır ve birlerden

oluşan (köşegen terimleri de hep sıfır olan) bakışlı her matris, bir çizgenin indirgenmiş ayrıt matrisi olarak düşünülemez. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi, anladığımız anlamda herhangi bir çizgenin indirgenmiş ayrıt matrisi değildir. Ayrıt matrisinin gerçekleştirimi sorununu aşağıdaki altbölümde inceleyeceğiz. Bu konuyu kapatmadan önce, indirgenmiş düğüm matrisinin önemli bir özelliğini verelim.

**Teorem 2.1.1**  $D$ , indirgenmiş düğüm matrisinin  $n$  ninci kuvvetini,

$$D^n = [d_{ij}^n]$$

olarak gösterelim.  $d_{ij}^n$ , çizgede  $n$  uzunluktaki değişik  $D_{i,j}$  dolaşmalarının toplam sayısını gösterir.

*Tanıt*

Teorem  $n=1$  için doğrudur. Teoremin  $n-1$  için de doğru olduğunu varsayalım.

## 2.1 Çakışım ile ilgili tanım matrisleri

---

$$D^n = D^{n-1} D$$

eşitliğinden,

$$d_{ij}^n = \sum_{k=1}^d d_{ik}^{n-1} d_{kj}$$

yazabiliriz. Eğer  $d_k, d_j$  ye bitişik ise  $n$  uzunluktaki her  $D_{i,j}$  dolaşısı,  $n-1$  uzunluktaki bir  $D_{i,k}$  dolaşısı ile  $d_k$  ve  $d_j$  düğümlerine bağlı ayrıtı içereceğinden, teorem bütün  $n$  ler için de doğrudur. ■

Benzer olarak,  $A^n$  matrisinin terimlerine ilişkin ne söyleyebiliriz ? Bu sorunun yanıtı, Altbölüm 2.8 de *ayrıt çizgesinin* tanımı yapıldıktan sonra, kolaylıkla verilebilir.

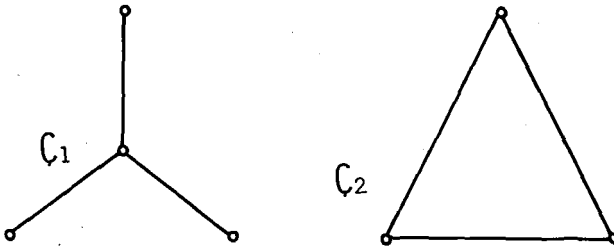
## 2.2 AYRIT MATRİSİNİN GERÇEKLEŞTİRİMİ

$\bar{A}$  ve  $A$  matrisleri arasındaki ilişkiden dolayı, bu altbölümde yalnız indirgenmiş ayrıt matrisinin gerçekleştirimi sorunu üzerinde duracağız. Çakışım matrisine ilişkin çizgenin kolaylıkla çizileceği görülmektedir. Öyleyse,  $A$  matrisine ilişkin  $P$  matrisinin bulunması gerçekleştirim sorununun da çözümü anlamına gelecektir.

Şekil 2.2.1 de gösterilen  $C_1$  ve  $C_2$  çizgelerini düşünürsek, her iki çizge için de indirgenmiş ayrıt matrisinin,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

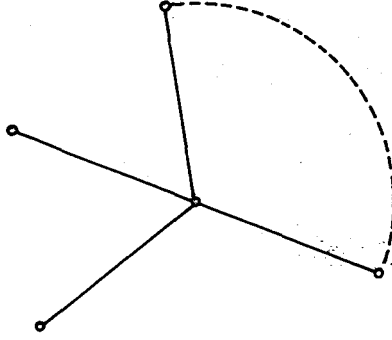
biçiminde olduğunu görürüz. Öyleyse,  $A_0$  matrisinin gerçekleştiriminde, ortaya bir belirsizlik çıkmaktadır. Bu belirsiz durumu, şimdilik bir



Şekil 2.2.1 Belirsiz durum.

## 2.2 Ayrıt matrisinin gerçekleştirimi

yana bırakalım ve Şekil 2.2.2 de gösterilen çizgeyi ele alalım. Bu çizgenin indirgenmiş ayrıt matrisi,



Şekil 2.2.2 İndirgenmiş matrisi dolu olan çizge.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Eğer gerçekleştirimi istenen indirgenmiş ayrıt matrisi yukarıda gösterildiği gibi değilse, ilişkin çizgede birbirine bitişik olmayan en az iki ayrıt var demektir. Başka bir deyişle, ilişkin çizge Şekil 2.2.2 de gösterilenden değişik ise,  $A$  matrisinin köşegeni dışında da sıfır olan

terimler bulunacaktır. Öyleyse, genel bir  $A$  matrisi, dizeler ve dikeyleri yeniden düzenlenerek, her zaman aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$A = \begin{bmatrix} O_{n_1} & A'_{12} & A'_{13} & A'_{1m} \\ A_{12} & O_{n_2} & A'_{23} & A'_{2m} \\ A_{13} & A_{23} & O_{n_3} & A'_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & A_{2m} & A_{3m} & O_{nm} \end{bmatrix}$$

Burada;  $O_{n_j}$   $n_j \times n_j$  boyutundaki sıfır matrisi göstermektedir. Ayrıca,

$$a = n_1 + n_2 + \dots + n_m$$

eşitliği de sağlanmaktadır.

$A$ 'nın bu genel yazılımındaki  $O_{n_j}$  altmatrisi, çizgede kendi aralarında bitişik olmayan  $n_j$  sayıda ayrıtın bulunduğunu belirtir. Bu gözlem sonucu,  $A$  matrisinin gerçekleştirimi için *gerek* koşulu aşağıdaki gibi verebiliriz.

**Teorem 2.2.1** İndirgenmiş ayrıt matrisinin gerçekleştirimi için gerek koşul, bütün  $i$  ve  $j$  ler için,  $A_{ij}$  altmatrisinin dizelerinde, iki ya

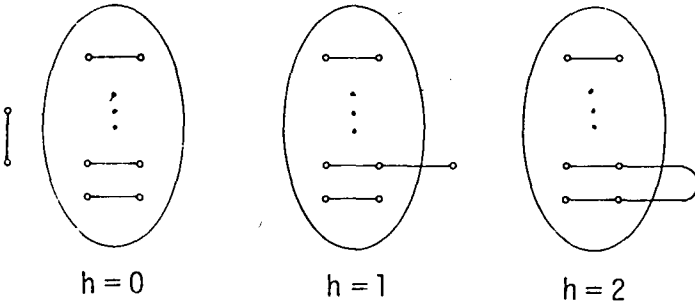


## 2.2 'Ayrıt matrisinin gerekleştirmi

da daha az bire eşit teriminin bulunmasıdır.

*Tanııt*

$O_{n_j}$  altmatrisine ilişkin ayrıtlar, Şekil 2.2.3 de gösterildiği gibi birbirlerine bitişik değildir.  $A_{ij}$  matrisindeki herhangi bir dizekte  $h$  sayıda bire



Şekil 2.2.3 Teorem 2.2.1 in açıklanması.

eşit terimin bulunması, bu dizeğe ilişkin ayrıtın  $O_{n_j}$  altmatrisine ilişkin ayrıtlardan  $h$  kadarına bitişik olması anlamına gelmektedir. Bu gözlem, Şekil 2.2.3 de gösterildiği gibi  $h$  nin,

$$0 \leq h \leq 2$$

eşitsizliğini sağlamasını gerektirecektir. ■

Teorem 2.2.1 de ileri sürülen koşul, gerek olmakla birlikte yeterli değildir. Koşulun yetersizliğini bir örnekle aşağıdaki gibi açıklayabiliriz.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde verilen matris, Teorem 2.2.1 deki gerek koşulu sağlamasına karşın, bir çizge ile gerçekleştirilemez.

$\mathcal{C}(d,a)$  ya ilişkin  $a \times a$  boyutundaki  $A$  matrisi ile  $d \times a$  boyutundaki  $\bar{P}$  matrisini düşünelim.  $A_j$ ,  $A$  matrisinin ilk  $j$  sayıdaki dizek ve dikeçlerinden oluşan altmatrisi,  $\bar{P}_j$  ise  $A_j$  altmatrisine ilişkin çakışım matrisini göstereyin. Bu durumda,  $A_j$  matrisini

$$A_j = \begin{bmatrix} A_{j-1} & \vdots & f_j \\ \hline f_j & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

olarak yazabiliriz. Burada  $f_j$ ,  $A$  matrisinin  $j$  ninci dizeğinde, köşegenine kadar olan ilk  $j-1$  teriminin oluşturduğu bir dizek matrisidir.  $A_{j-1}$

## 2.2 Ayrıt matrisinin gerçekleştirimi

---

altmatrisine ilişkin çakışım matrisi  $\bar{P}_{j-1}$  olsun.

Önümüze, inceleyeceğimiz iki durum ortaya çıkar;  $f_j$  nin bütün terimleri sıfırdır ya da  $f_j$  de sıfır olmayan terimler vardır.

*Durum 1*

$f_j$  nin bütün terimleri sıfır ise:

Böyle bir durumda  $A_j$  her zaman gerçekleşebilir ve ilişkin çakışım matrisi

$$\bar{P}_j = \left[ \begin{array}{c|c} \bar{P}_{j-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ & 1 \end{array} \right]$$

olacaktır.

*Durum 2*

$f_j$  de sıfır olmayan terimler varsa :

$f_j$  de sıfır olmayan terimlere karşı düşen ayrıtların

$\bar{P}_{j-1}$  deki dikeçlerinden oluşan  $F_j$  matrisini düşünelim.

a)  $F_j$  nin  $m$  gibi bir dizeği hep birlerden oluşmuşsa ve  $A_{j-1}$  in  $m$  ninci dizeğinde bunlardan başka sıfır olmayan terim yoksa,

$$\bar{P}_j = \left[ \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \bar{P}_{j-1} \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ 1 \end{matrix} \end{array} \right] \quad \leftarrow \text{m ninci dizek}$$

b)  $F_j$  nin, toplandıklarında hep birlerden oluşan yeni bir dizek verecek  $m$  ve  $n$  gibi iki dizeği varsa, ve  $\bar{P}_{j-1}$  in  $m$ . ve  $n$  ninci dizeklerinde bunlardan başka sıfır olmayan terim yoksa

$$\bar{P}_j = \left[ \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \bar{P}_{j-1} \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{m ninci dizek} \\ \leftarrow \text{n ninci dizek} \end{array}$$

olacaktır.

Eğer  $F_j$  de, a) ya da b) deki koşulları sağlayan nitelikte dizekler yoksa,  $A_j$  anladığımız anlamda bir çizge ile gerçekleşemez.  $A_j$  nin gerçekleşebilmesi için yukarıda açıklanan durumların bir yeter ve gerek koşul oluşturdukları gözden kaçmamalıdır. Durum 2 de a) ve b) de öne sürülen koşulların birlikte sağlandığı durumlarda eğer bir seçenek çözüme gitmezse, öbür bütün seçeneklerin de denenmesi gerekebilir.

## 2.2 Ayrıt matrisinin gerçekleştirimi

---

Bunu bir örnek üzerinde aşağıdaki gibi açıklayabiliriz.

$$A = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

verilen bir ayrıt matrisi olsun.  $j = 1, 2$  ve  $3$  için yukarıda açıklanan yöntemi uygularsak

$$\bar{P}_3 = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad ( 2 \text{ ve } 3 \text{ üncü dizeler de seçilebilirdi } )$$

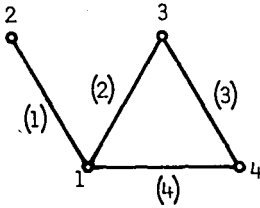
## 2. BÖLÜM

$$j = 4$$

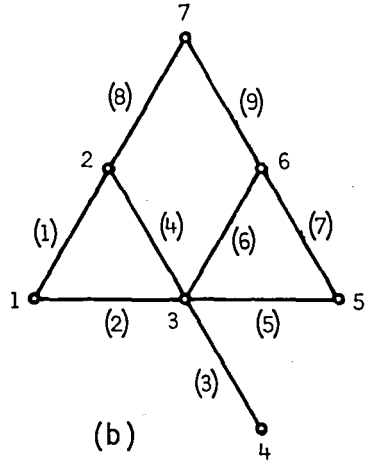
$$f_4 = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & & & \end{matrix}$$

$$\bar{P}_4 = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & & & \end{matrix}$$

elde ederiz.  $\bar{P}_4$  e karşılık gelen çizge Şekil 2.2.4a da gösterilmiştir. Ancak  $j = 5$  için,  $A_5$  in gerçekleşmeyeceğini görürüz,



(a)



(b)

2.2.4 Ayırıt matrisinin gerçekleştirimi.

## 2.2 Ayrıt matrisinin gerçekleştirimi

---

$$F_5 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \end{array} \end{array}$$

Öyleyse,  $\bar{P}_3$  matrisine geri giderek 2 ve 3 üncü dizelerin alındığı öbür seçeneği inceleyelim. Bu yeni  $\bar{P}_4$  matrisi

$$\bar{P}_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \end{array}$$

olacaktır. Yöntemi  $j = 5,6,7,8$  ve  $9$  için uygulayarak Şekil 2.2.4b de gösterilen çizgeyi elde ederiz.

Yukarda açıkladığımız bu yöntemi ayrıntılı olarak inceleyerek, ancak Şekil 2.2.1 de gösterilen çizgelere ilişkin ayrıt matrisini gerçekleştiriminde bir belirsizlik çıkacağı ve bu durumun dışındaki bütün gerçekleştirilebilen matrisler için, eşyapıluluk altında tek bir çizge bulunacağı görülür (gösteriniz).

## 2.3 ÇİZGELER ARASINDA İŞLEMLER

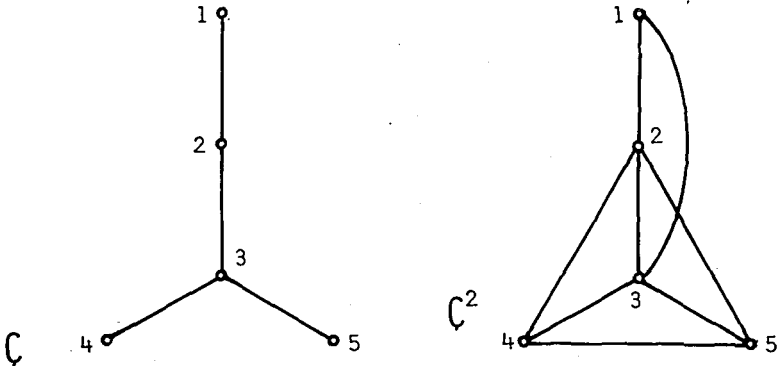
İki ayrı çizge arasındaki işlemleri tanımlamadan önce bir çizge ile kendi arasında tanımlanan işlemleri inceleyelim.

**Tanım 2.3.1**  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{C}^n$ , düğüm kümeleri arasında 1:1 karşılıkma olan iki çizgeyi gösterebilir.  $\mathcal{C}$  de

$$1 \leq u(d'_i, d'_j) \leq n$$

eşitsizliğinin sağlandığı her  $d_i, d_j \in \Delta$  düğüm çifti arasında  $\mathcal{C}^n$  de de bir ayrıt varsa,  $\mathcal{C}^n$ ,  $\mathcal{C}$  nin  $n$  ninci kuvvetidir.

Bu tanıma göre, Şekil 2.3.1a daki çizgenin ikinci kuvveti, Şekil 2.3.1b de olduğu gibi bulunabilir.  $\mathcal{C}$  de  $u(1,4) = 3 > 2$  olduğu için,  $\mathcal{C}^2$  de bu düğümler arasında bir ayrıt yoktur.



Şekil 2.3.1  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{C}^2$  çizgeleri.



## 2.3 Çizgeler arasında işlemler

---

$C^n$  nin indirgenmiş düğüm matrisini  $D(n)$  olarak göstereyim. Boole aritmetiği kullanarak ( $1 + 1 = 1$ ),

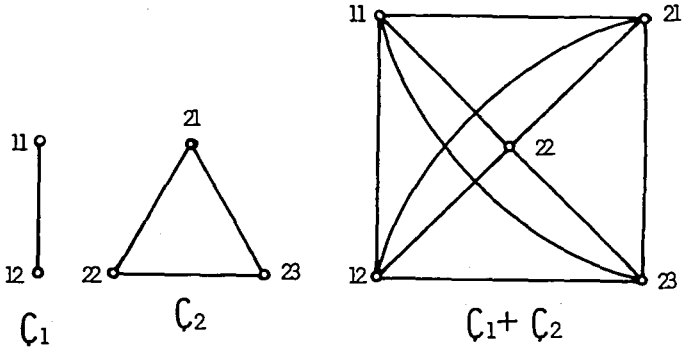
$$\begin{aligned} D(n) &= (D + I)^n - I \\ &= D^n + D^{n-1} + \dots + D \end{aligned}$$

olduğunu gösterebiliriz.  $C^n$  çizgesine,  $C$  nin  $n$  ninci kuvveti denilmesinin nedeni de budur. Eşanlı olarak,  $C$  çizgesine  $C^n$  nin  $n$  ninci kökü de diyebiliriz (Benzer tanımların  $A$  matrisi üzerinde de yapılabileceğini inceleyiniz).

Bir çizgenin köklerinin olup olmadığını anlamak ve eğer varsa bulmak pek de kolay olmayan bir sorundur. Ancak ikinci kökün varlığına ilişkin bir yeter ve gerek koşul verilebilir. Biz bu konu üzerinde durmayacağız.

**Tanım 2.3.2**  $C_1$  ve  $C_2$  rasgele iki çizge olsun.  $C_1 \cup C_2$  çizgesinde,  $C_1$  in her bir düğümünü  $C_2$  nin bütün düğümlerine bitiştirerek elde edilen  $C_1 + C_2$  çizgesine toplam çizge denir.

Şekil 2.3.2 de  $C_1$  ve  $C_2$  çizgeleri ile ilişkin toplam çizge gösterilmiştir.



Şekil 2.3.2  $C_1$ ,  $C_2$  ve ilişkin toplam çizge.

**Tanım 2.3.3**  $C_1$ ,  $C_2$  ve  $C_1 \times C_2$  çizgelerinin düğüm ve ayrıt kümeleri sırasıyla  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1 \times \Delta_2$  ve  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_1 \times \Psi_2$  olsun. Ayrıca

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \phi$$

koşulu sağlansın. Bu çizgelerin düğümlerini

$$d_{1i} \in \Delta_1 \quad d_{2j} \in \Delta_2 \quad \text{ve}$$

$(d_{1i}, d_{2j}) \in \Delta_1 \times \Delta_2$  olarak gösterelim.

$C_1$  ve  $C_2$  çizgesinin çarpım çizgesi  $C_1 \times C_2$  ;

a)  $d_{1i} = d_{1k}$  ve  $(d_{2j}, d_{2\ell}) \in \Psi_2$

ya da

b)  $d_{2j} = d_{2\ell}$  ve  $(d_{1i}, d_{1k}) \in \Psi_1$

koşullarından biri sağlandığında,

$(d_{1i}, d_{2j})$  ve  $(d_{1k}, d_{2\ell})$  düğümleri

arasında bir ayrıtı bulunan çizge

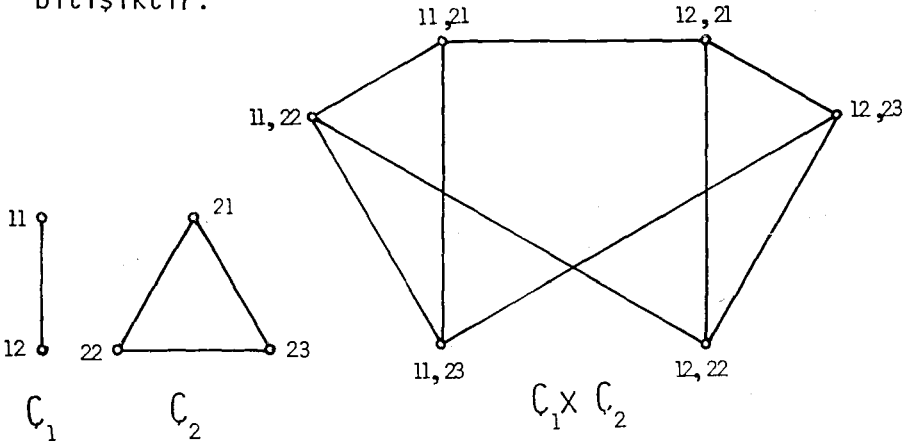
olarak tanımlanır.

## 2.3 Çizgeler arasında işlemler

Şekil 2.3.3 de  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$  çizgeleri ile bu çizgelere ilişkin çarpım çizge gösterilmiştir. Burada örneğin,  $(11, 21)$  ve  $(11, 22)$  düğüm çifti için,

$$11 = 11 \quad \text{ve} \quad (21, 22) \in \Psi_2$$

olduğundan,  $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$  çizgesinde bu düğümler bitişiktir.



Şekil 2.3.3  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  ve ilişkin çarpım çizge  $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ .

**Tanım 2.3.4**  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  ve  $\mathcal{C}_1 [\mathcal{C}_2]$  çizgelerinin düğüm ve ayırıt kümeleri sırasıyla,  $\Delta_1, \Delta_2$ ,  $\Delta_1 [\Delta_2]$   $\Psi_1, \Psi_2$ ,  $\Psi_1 [\Psi_2]$  olsun. Ayrıca  $\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$  koşulu sağlansın. Bu çizgelerin düğümlerini  $d_{1i} \in \Delta_1$   $d_{2j} \in \Delta_2$  ve  $(d_{1i}, d_{2j}) \in \Delta_1 \times \Delta_2$  olarak gösterelim.  $\mathcal{C}_1$  in,  $\mathcal{C}_2$  den

oluşturduğu olusuk çizge  $C_1 [C_2]$

a)  $d_{1i}, d_{1k}$  ye bitişikse

ya da

b)  $d_{1i} = d_{1k}$  ve  $d_{2j}, d_{2l}$  ye

bitişikse koşullardan biri

sağlandığında,  $(d_{1i}, d_{2i})$  ve

$(d_{1k}, d_{2l})$  düğümleri arasında bir

ayrıntı bulunan çizge olarak

tanımlanır.

Şekil 2.3.4 de  $C_1 [C_2]$  ve  $C_2 [C_1]$  olusuk çizgeleri gösterilmiştir.

$$C_1 + C_2 = C_2 + C_1$$

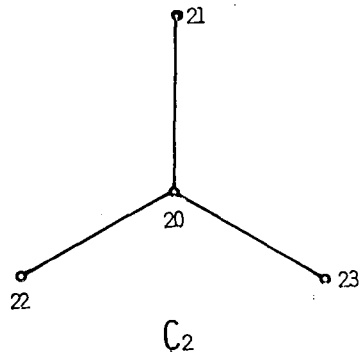
ve

$$C_1 \times C_2 = C_2 \times C_1$$

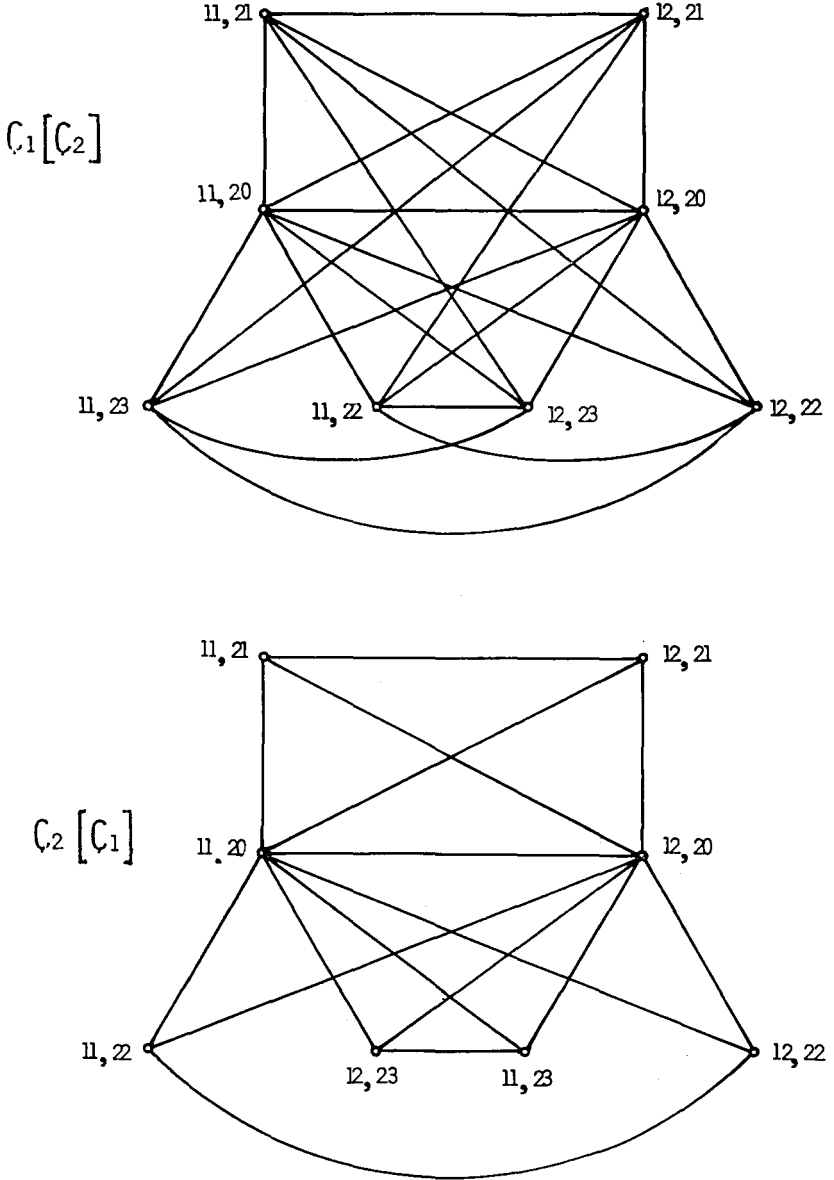
eşitliklerine karşın, genellikle,

$$C_1 [C_2] \neq C_2 [C_1]$$

olacaktır (Hangi koşullar altında bu eşitsizliğin, eşitliğe dönüşeceğini inceleyiniz).



## 2.3 Çizgeler arasında işlemler



Şekil 2.3.4  $C_1$ ,  $C_2$  ve ilişkin oluşuk çizgeler.

## 2. BÖLÜM

---

$d_1, d_2$  ve  $a_1, a_2$  sırasıyla,  $\zeta_1$  ve  $\zeta_2$  çizgelerinin düğüm ve ayrıt sayıları ise

a)  $\zeta_1 + \zeta_2$  çizgesinde  $a_1 + a_2 + d_1 d_2$

b)  $\zeta_1 \times \zeta_2$  çizgesinde  $d_1 a_2 + d_2 a_1$

c)  $\zeta_1 \left[ \zeta_2 \right]$  çizgesinde  $d_1 a_2 + d_2^2 a_1$

sayıda ayrıt bulunacağı görülecektir (gösteriniz).

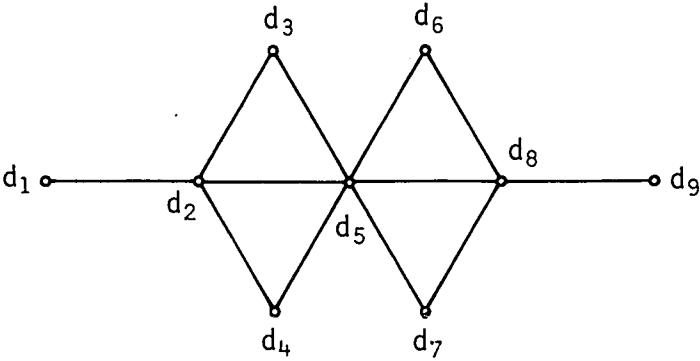
$A_1, A_2$  ve  $D_1, D_2$  sırasıyla  $\zeta_1$  ve  $\zeta_2$  çizgelerinin ayrıt ve düğüm matrisleri ise; toplam, çarpım ve oluşuk çizgelerin ayrıt ve düğüm matrislerinin bu matrisler türünden bulunmasını okuyucuya bırakıyoruz.

## 2.4 İKİKÖMELİ ÇİZGELER

$\mathcal{C}(d,a)$  daki düğümlerin bir altkümesi  $\Delta_1$  i düşünelim. Eğer bu kümedeki düğüm çiftlerinden hiç biri birbirine bitişik değilse, bu kümeye *bağımsız küme* diyeceğiz. Örneğin, Şekil 2.4.1deki çizgede,

$$\Delta_1 = (d_1) \quad \Delta_2 = (d_1, d_3) \quad \Delta_3 = (d_1, d_3, d_4, d_6, d_7, d_9)$$

kümeleri bağımsızdır.



Şekil 2.4.1 Bağımsızlığı açıklanması.

**Tanım 2.4.1**  $\mathcal{C}(d,a)$  da en çok düğümü içeren bağımsız kümedeki düğüm sayısına, çizgenin bağımsızlığı ( $\beta$ ) denir.

Şekil 2.4.1 deki çizgede en çok düğümü içeren bağımsız küme  $\Delta_3$  dür. Öyleyse, bu çizgenin bağımsızlığı altıdır ( $\beta = 6$ )

$\Delta$  ve  $\Delta_1$  sırasıyla, çizgedeki düğüm kümesini ve bu kümenin bir altkümesini gösterebiliriz. Eğer bütün  $d_i \in \Delta$  için,  $d_i$  ya  $\Delta_1$  kümesinde ya da bu kümedeki bir düğüme bitişik ise,  $\Delta_1$  kümesine *baskın küme* diyeceğiz. Baskın kümeyi oluşturan düğümler arasında bitişik olmama koşulunun aranmadığı gözden kaçmamalıdır. Bu açıklamadan,  $\Delta$  nın da bir baskın küme olduğu görülür. Örneğin, Şekil 2.4.1 deki çizgede,

$$\begin{aligned}\Delta_4 &= (d_1, d_2, d_5, d_8) & \Delta_5 &= (d_2, d_5, d_9) \\ \Delta_6 &= (d_2, d_8)\end{aligned}$$

kümeleri baskındır.

**Tanım 2.4.2**  $\mathcal{C}(d, a)$  da en az düğümü içeren baskın kümenin düğüm sayısına, çizgenin baskınlığı ( $\omega$ ) denir.

Şekil 2.4.1 deki çizgede en az düğümü içeren baskın küme  $\Delta_6$  dır. Öyleyse bu çizgenin baskınlığı ikidir ( $\omega = 2$ ). Tanım 2.4.1 ve 2.4.2 den, genel bir çizge için

$$\omega \leq \beta$$

olduğunu gösterebiliriz. (gösteriniz)

**Tanım 2.4.3**  $\mathcal{C}(d, a)$  da hem baskın hem de bağımsız



## 2.4 İkikümelî çizgeler

---

olan düğüm kümesine çizgenin çekirdeği ( $\Lambda$ ), çekirdekdeki düğüm sayısına çekirdek yoğunluğu ( $\lambda$ ) denir.

Her çizgede bir çekirdek bulunmayacağı gözden kaçmamalıdır. Şekil 2.4.1 deki çizgede  $\Delta_6$  baskın olduğu gibi bağımsızdır da. Öyleyse bu çizgenin çekirdeği,

$$\Lambda = \Delta_6 = (d_2, d_8)$$

çekirdek yoğunluğu ise  $\lambda = 2$ . Bu çizgede,

$$\Delta_7 = (d_1, d_3, d_4, d_6, d_7, d_9)$$

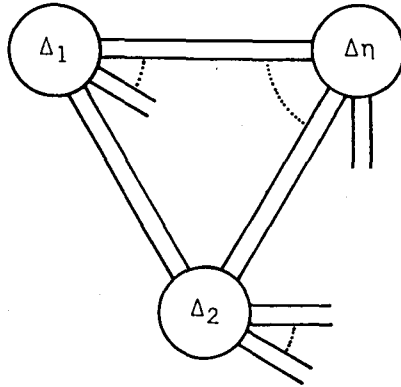
kümesi de yoğunluğu 6 olan bir çekirdektir. Yoğunluğu en az olan çekirdeği özçekirdek  $\Lambda_0$  ve ilişkin yoğunluğu (özçekirdek yoğunluğu)  $\lambda_0$  ile göstereceğiz.  $\zeta(d, a)$  da eğer varsa  $\Lambda_{0,1}$  bulacak bir yöntem geliştirmeğe çalışınız.

**Tanım 2.4.4** Düğümleri,  $n$ -bağımsız kümeye ayrılabilen çizgelere  $n$ -kümelî çizge denir.

Şekil 2.4.2 de simgesel olarak  $n$ -kümelî bir çizge gösterilmiştir. Böylesine çizgelerin düğüm matrisi

$$D = \begin{bmatrix} 0 & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D'_{12} & 0 & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D'_{1n} & D'_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir.



Şekil 2.4.2 n-kümelî çizgenin simgesel gösterimi.

n-kümelî çizgelerin özel bir durumu, ikikümelî çizgelerdir.

**Tanım 2.4.5** Düğümleri iki bağımsız kümeye ayrılabilen çizgelere ikikümelî çizge denir.

İkikümelî bir  $C(d,a)$  çizgesini, kümelerindeki düğümlerin sayısını da belirtecek biçimde  $I(m,n)$

## 2.4 İkikümelî çizgeler

---

olarak göstereceğiz. Burada,

$$d = m + n$$

Bağlı bir  $\zeta(d,a)$  çizgesinde,  $\Lambda_1$  ve  $\Lambda_2$  ortak düğümsüz iki ayrı çekirdek olsun.

$$\Delta = \Lambda_1 \cap \Lambda_2$$

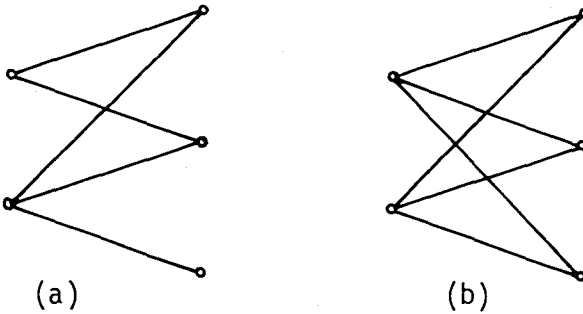
ise,

$$d = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$m = \lambda_1$$

$$n = \lambda_2$$

eşitlikleri sağlanır ve  $\zeta(d,a), \mathfrak{I}(m,n)$  olarak gösterilen bir ikikümelî çizgedir. Şekil 2.4.3 de bağlı ikikümelî çizgelere örnek gösterilmiştir.



Şekil 2.4.3 Bağlı ikikümelî çizgeler.

## 2. BÖLÜM

---

$\Lambda_1$  deki her düğümün,  $\Lambda_2$  deki bütün düğümlere bitişik olduğu özel ikikümelî çizgelere dolu ikikümelî çizge diyeceğiz. Dolu ikikümelî çizgelerde,

$$a = m n$$

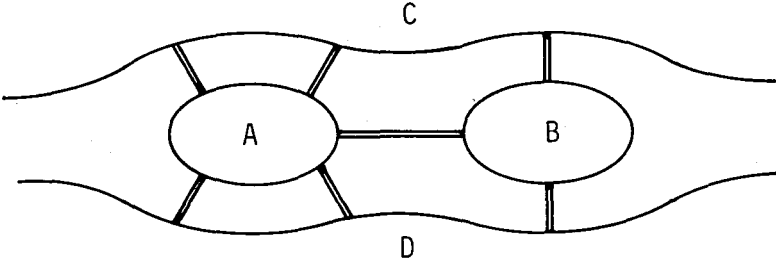
eşitliğinin sağlandığı hemen görülecektir.  $\mathcal{C}(d,a)$  nın ikikümelî çizge olabilmesi için gerek ve yeter koşulu tanıtlamadan, aşağıdaki gibi verebiliriz.

**Teorem 2.4.1**  $\mathcal{C}(d,a)$  nın ikikümelî çizge olabilmesi için gerek ve yeter koşul, her çevre için çevreyi oluşturan ayrıtların toplamının çiftsayı olmasıdır.

$\mathcal{C}(d,a)$  nın ikikümelî çizge olup olmadığını saptamak için bir yöntem geliştirmeğe çalışınız.

## 2.5 EULER ÇİZGELERİ

Çizge kuramı, doğuşunu ve ilk gelişimini bir yerde bulmacalara borçludur. Bunlardan en başta geleni de 'Königsberg Köprüleri' diye adlandırılanıdır. Königsberg (bugünkü Kaliningrad) kentindeki Pregel ırmağında, Şekil 2.5.1 de gösterildiği gibi, iki ada ve bu adaları birbirlerine ve kıyılarına bağlayan yedi köprü vardır. Sorun A, B, C ve D



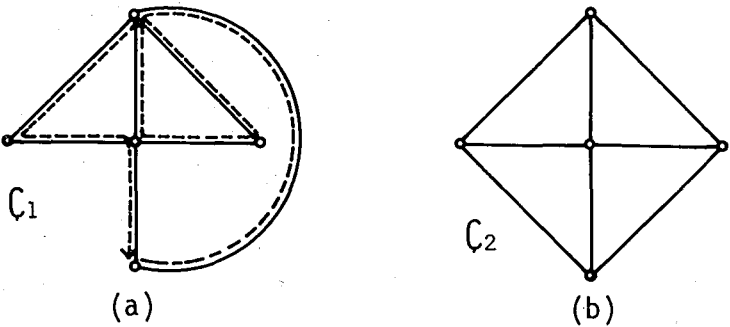
Şekil 2.5.1 Königsberg Köprüleri.

ile gösterilen herhangi bir kara parçasından başlayarak ve yeryuvarlağın çevresinde dolanmadan ya da uçmadan, bu yedi köprünün her birinden yalnız bir kez geçerek başlangıç yerine geri gelmekti. Euler bu bulmacanın çözümünü ararken, bugün *Euler çizgesi* diye adlandırdığımız çizgelerin özelliklerini ortaya koyarak, çizge kuramının da temellerini atmış oldu. Königsberg köprülerinin çözümünü biraz erteleyerek, önce Euler çizgelerinin tanımını verelim.

**Tanım 2.5.1** Ayrıtları, kapalı bir gezi olarak çizilebilen çizgelere bağlı Euler çizgesi denir.

**Tanım 2.5.2** Her parçası bir Euler çizgesi olan çizgelere Euler çizgesi (E) denir.

Şekil 2.5.2 deki çizgelerden  $\zeta_1$  Euler çizgesidir. Şekil 2.5.2 deki  $\zeta_2$  çizgesi ise Euler çizgesi değildir. Kapalı gezideki düğüm kerteleri çiftsayı olduğu için, Euler çizgesinin tanımını



Şekil 2.5.2 a) Bir Euler çizgesi  
b) Euler olmayan bir çizge.

aşağıdaki gibi de verebiliriz.

**Tanım 2.5.3** Bütün düğümlerinin kertesi çiftsayıya eşit olan çizgelere Euler çizgesi denir.

**Teorem 2.5.1** (Veblen)  $\zeta$  nin Euler çizgesi

## 2.5 Euler çizgeleri

---

olabilmesi için yeter ve gerek koşul,  $\zeta$  nin ortak ayrıtırsız çevrelerin birleşiminden oluşmasıdır.

*Tanııt*

*Gerek Koşul*

$\zeta$  nin ortak ayrıtırsız çevrelerin birleşiminden oluşması, Tanım 2.5.3 den,  $\zeta$  deki bütün düğüm kertelerinin çiftsayıya eşitliğini önerecektir. Bu da,  $\zeta$  nin Euler çizgesi olması demektir.

*Yeter Koşul*

$\zeta$  nin Euler çizgesi olduğunu varsayalım. Demek ki  $\zeta$  deki bütün düğüm kerteleri çiftsayıdır.  $d_1$ ,  $\zeta$  deki bir düğüm olsun.  $d_1$  düğümünü içine alan  $\zeta_1$  çevresi çizgeden çıkarıldığında geriye kalan

$$\zeta_1 = \zeta - \zeta_1$$

çizgesinde de bütün düğüm kerteleri çiftsayıya eşittir. Bu işlem yeterince yinelenirse,

$$\zeta_2 = \zeta_1 - \zeta_2$$

.....

$$\begin{aligned}\zeta_n &= \zeta_{n-1} - \zeta_n \\ &= \phi\end{aligned}$$

elimizde boş çizge kalacaktır (*boş çizgenin Euler çizgesi olduğu gözden kaçmamalıdır*). Demek ki  $\mathcal{C}$  bir Euler çizgesidir. ■

**Teorem 2.5.2** Euler çizgesindeki her düğüm en az bir çevrenin içindedir.

*Tanıt*

Her düğüme çakışık en az iki ayrıt bulunması özelliğinden teorem hemen tanıtlanabilir. ■

**Teorem 2.5.3**  $\mathcal{C}$  nin kapalı gezi olabilmesi için yeter ve gerek koşul,  $\mathcal{C}$  nin bağlı bir Euler çizgesi olmasıdır.

*Tanıt*

*Gerek Koşul*

Eğer  $\mathcal{C}$  kapalı gezi ise, bütün düğümlerin kerteleri çiftsayıdır. Bu da  $\mathcal{C}$  nin Euler çizgesi olması demektir.

*Yeter Koşul*

$\mathcal{C}$ , bağlı bir Euler çizgesi olsun.  $G$ ,  $\mathcal{C}$  deki olabildiğince çok ayrıttan oluşan bir geziyi gösterebilir, Eğer,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \mathcal{C} - G \\ &\neq \phi \end{aligned}$$



## 2.5 Euler çizgeleri

---

ise, Teorem 2.5.1 den dolayı  $\mathcal{C}$  bir Euler çizgesidir.

$\mathcal{C}_1$  in boş çizge olmadığını varsayalım.  $\mathcal{C}$  bağlıdır varsayımından dolayı,  $\mathcal{C}_1$  ve  $G$  nin ortak olduğu bir  $d_i$  düğümü vardır.  $\mathcal{C}_1$  in Euler çizgesi olması,  $\mathcal{C}_1$  içinde  $d_i$  yi de içeren bir  $\mathcal{C}_1$  çevresinin varlığını önerecektir. Öyleyse,  $G \cup \mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}$  nin içinde  $d_i$  düğümünden başlanarak çizilebilecek ve  $G$  den daha çok ayrıtı içeren bir kapalı gezidir.

Bu sonuç,  $G$  nin en çok ayrıtı içerdiği varsayımı ile çelişiktir. Demek ki  $\mathcal{C}_1$  boş çizgedir. ■

**Teorem 2.5.4** (Listing) Bağlı bir  $\mathcal{C}$  çizgesinin açık gezi olabilmesi için gerek ve yeter koşul, yalnız iki düğüm kertesinin teksayı olmasıdır.

*Tanıt*

*Gerek Koşul*

$\mathcal{C}$  nin açık gezi olması,  $\mathcal{C}$  nin bağlı ve kertesini teksayı olan yalnız iki düğümü bulunduğu anlamına gelecektir.

*Yeter Koşul*

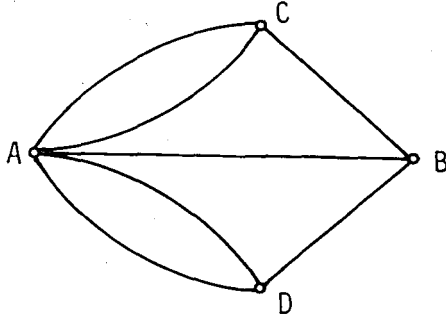
$\mathcal{C}$  nin kertesini teksayı olan yalnız iki düğümü bulunduğunu ve bağlı olduğunu varsayalım.  $d_1$  ve  $d_2$  kertesini teksayı olan düğümleri göstereceğiz.  $a_0, d_1$

ve  $d_2$  düğümleri arasında eklenen bir ayrıt ise,

$$C_1 = C \cup a_0$$

Euler çizgesidir.  $C_1$  kapalı gezidir. Öyleyse  $C$  açık gezidir. ■

Königsberg köprülerini, bu önbilgilerin ışığı altında bir kez daha düşünelim. Şekil 2.5.1 deki çizimde, kara parçalarını düğümler, köprüleri de ayrıtlar ile gösterirsek, Şekil 2.5.3 deki çizmeyi elde ederiz. Bu çizgedeki bütün düğüm mertekeleri teksayı olduğu için Teorem 2.5.4 den dolayı bulmacanın çözümü yoktur.



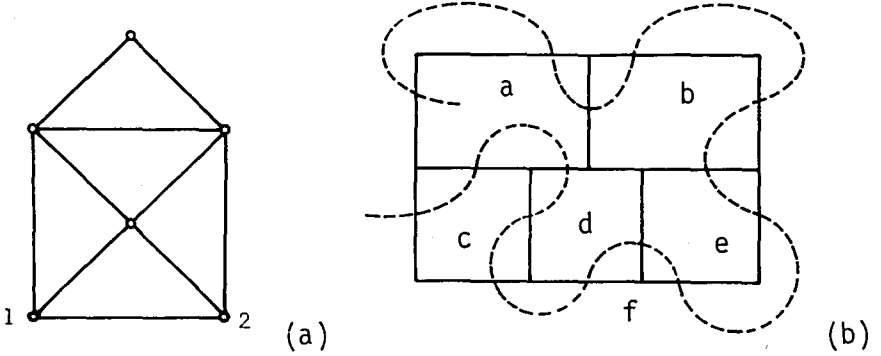
Şekil 2.5.3 Königsberg köprülerine ilişkin çizge.

'Şekil 2.5.4a daki çizimi elimizi kaldırmadan çizebilirmiyiz' ya da 'Şekil 2.5.4b deki çizimin ayrıtlarının hepsini, şekilde noktalı çizgi ile gösterildiği gibi yalnız bir kez kesebilir miyiz?'

## 2.5 Euler çizgeleri

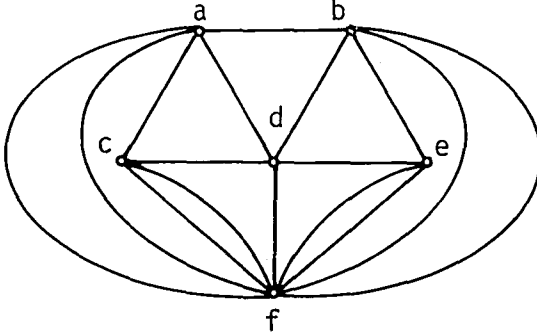
gibi sorular da Euler çizgelerine yakın ilişkisi olan bulmacalardır.

Şekil 2.5.4a daki çizimde 1 ve 2 düğümleri arasına bir ayrıt eklenmiş olsaydı, ortaya bir Euler çizgesi çıkacaktı. Öyleyse bu bulmaca, 1 ya da 2 düğümünden başlanarak çözülebilir. Şekil 2.5.4b deki çizime ilişkin, Şekil 2.5.5 deki çizgeyi düşünelim. Bu çizge bir Euler çizgesi değildir.



Şekil 2.5.4 Bulmacalar.

Ancak bu çizgede kertesisi teksayı olan dört düğüm olduğu için a, b, f ya da d den başlayarak, 16



Şekil 2.5.5 Şekil 2.5.4b deki çizime ilişkin çizge.

## 2. BÖLÜM

---

yerine 15 ayrıtı kesebiliriz.

Euler çizgelerinin başka özelliklerinin ve genel bir çizgedeki Euler altçizgelerinin incelenmesini 3. Bölümde ele alacağız.

## 2.6 HAMILTON ÇİZGELERİ

Kavram olarak Euler çizgelerine benzeyen bir çizge türü de aşağıdaki gibi tanımlanan Hamilton çizgeleridir.

**Tanım 2.6.1**  $\mathcal{C}(d,a)$  daki bütün düğümleri içeren çevreye Hamilton çevresi denir.

**Tanım 2.6.2** içinde en az bir Hamilton çevresi bulunan çizgelere Hamilton çizgesi denir.

Benzer olarak, çizgedeki bütün düğümleri içeren yola da Hamilton yolu diyeceğiz. Ancak, çizgenin Hamilton çizgesi olabilmesi için, çizgede bir Hamilton yolunun bulunması yeterli değildir.

$\mathcal{C}(d,a)$  nın Hamilton çizgesi olabilmesi için gerek ve yeter koşulun bulunması, bugün de üzerinde düşünülen bir sorundur. Bu konudaki en iyi sonuç, Posa'nın çocuk denecek bir yaşta tanıtlamış olduğu aşağıdaki teoremdir.

**Teorem 2.6.1** (Posa)  $\mathcal{C}(d,a)$  en az üç düğümü olan bir çizgeyi gösterebilir ( $d=3$ ).

$$1 \leq n \leq d/2$$

koşulunu sağlayan her  $n$  tamsayısı için, kertesini  $n$  den büyük olmayan düğümlerin sayısı  $n$  den az ise

$\zeta(d, a)$  bir Hamilton çizgesidir.

Posa Teoremi 'kabaca', kertesi küçük olan düğümlerin sayısı pek o kadar çok değilse ilişkin çizgenin Hamilton çizgesi olabileceğinden başka birşek söylememektedir. Bu ilginç teoremin tanıtı aşağıdaki gibi yapılabilir.

*Tanıt*

Teoremin yanlış olduğunu varsayalım. Demek ki, teoremin koşulunu sağlayan ve Hamilton çizgesi olmayan bir  $\zeta$  çizgesi vardır. Genellemeden birşek yitirmeksizin, eklendiğinde çizgeyi Hamilton çizgesi yapacak bir  $a_0$  ayrıtının bulunduğunu varsayalım. Başka bir deyişle,

$$\zeta_1 = \zeta \cup a_0$$

bir Hamilton çizgesidir.  $d_1$  ve  $d_2$ , aralarına  $a_0$  ayrıtı eklenen, kertelerinin toplamı en büyük olan ve bitişik olmayan iki düğümü gösterebilir. Ayrıca bu düğümlerin kerteleri,

$$k_1 \leq k_2$$

koşulunu da sağlasın. Yukarıda yaptığımız varsayıma göre,  $a_0$  ayrıtı bu düğümlerin arasına eklendiğinde oluşan  $\zeta_1$ , bir Hamilton çizgesidir. Ayrıca,  $\zeta_1$

## 2.6 Hamilton çizgeleri

---

deki bütün Hamilton çevreleri de bu  $a_0$  ayrımını içerecektir. Demek ki,

$$d_1, d_2, \dots, d_q$$

düğümüleri bir Hamilton yolu tanımlamaktır.

$1 < i < q$  için, eğer  $d_i$  düğümü  $d_1$  e bitişikse,

$d_{i-1}$  düğümü  $d_q$  ya bitişik değildir. Çünkü, bu koşul sağlanmazsa,

$$(d_1, \dots, d_i, d_{i+1}, \dots, d_q, d_{i-1}, d_{i-2}, \dots, d_1)$$

$\mathcal{C}$  içinde bir Hamilton çevresi oluşturacaktır.

Öyleyse,  $\mathcal{C}$  de en az  $k_1$  düğüm  $d_q$  ya bitişik değildir ve en çok  $(q-1-k_1)$  düğüm de  $d_q$  ya bitişiktir. Bu gözlemden,

$$k_1 \leq k_q \leq q-1 - k_1$$

ya da

$$k_1 \leq (q-1)/2$$

sonucunu çıkarabiliriz.  $d_1$  ve  $d_q$  nun seçiminden,  $d_q$  ya bitişik olmayan bütün  $d_{i-1}$  düğümleri için,

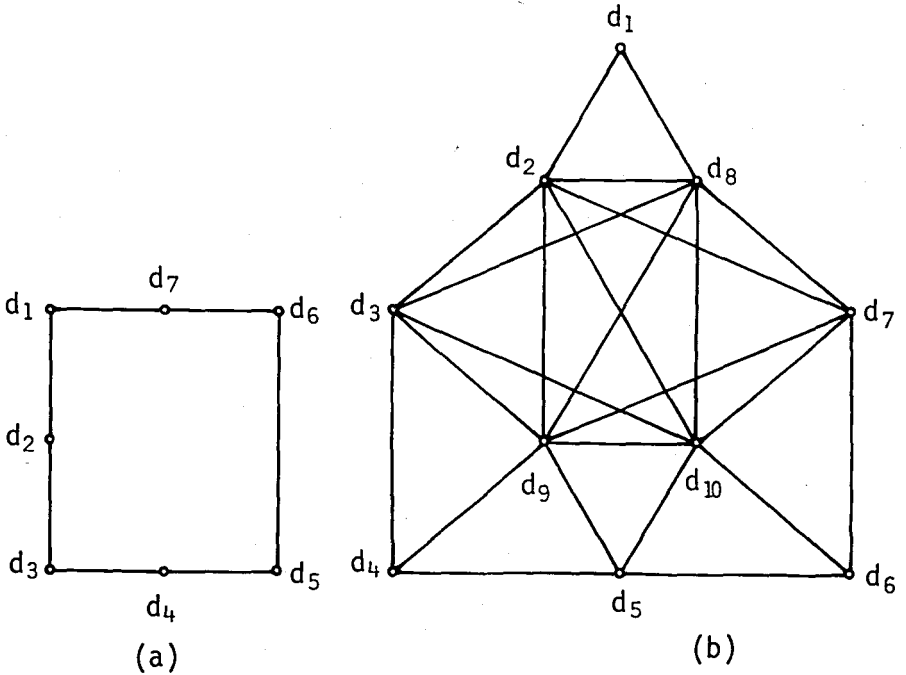
$$k_{i-1} \leq k_1$$

eşitsizliğinin doğruluğu görülebilir. Demek ki, kertesesi  $k_1$  den büyük olmayan en az  $k_1$  düğüm vardır. Ancak,

$$1 \leq k_1 \leq q/2$$

varsayımından dolayı da çizgede kertesesi  $k_1$  den büyük olmayan,  $k_1$  den az düğüm vardır. Bu çelişki,  $\mathcal{C}$  nin Hamilton çizgesi olması ile ortadan kalkabilir. ■

Pósa teoreminin yalnız bir yeter koşul olduğu ve gerek koşul olamayacağı hemen gösterilebilir. Örneğin, Şekil 2.6.1 deki çizgeler, Hamilton çizgesi olmalarına karşın, Pósa Teoremini sağlamamaktadır. Örneğin Şekil 2.6.1b deki



Şekil 2.6.1 Pósa Teoreminin yeter koşulunu sağlamayan Hamilton çizgeleri.



## 2.6 Hamilton çizgeleri

---

çizgede,

$$d = 10$$

$$1 \leq n \leq 5$$

$n = 4$  için kertesisi 4 ya da 4 den küçük olan (4 den büyük olmayan) düğümlerin sayısı  $m = 4$  dür ( $d_1, d_4, d_5, d_6$ ).

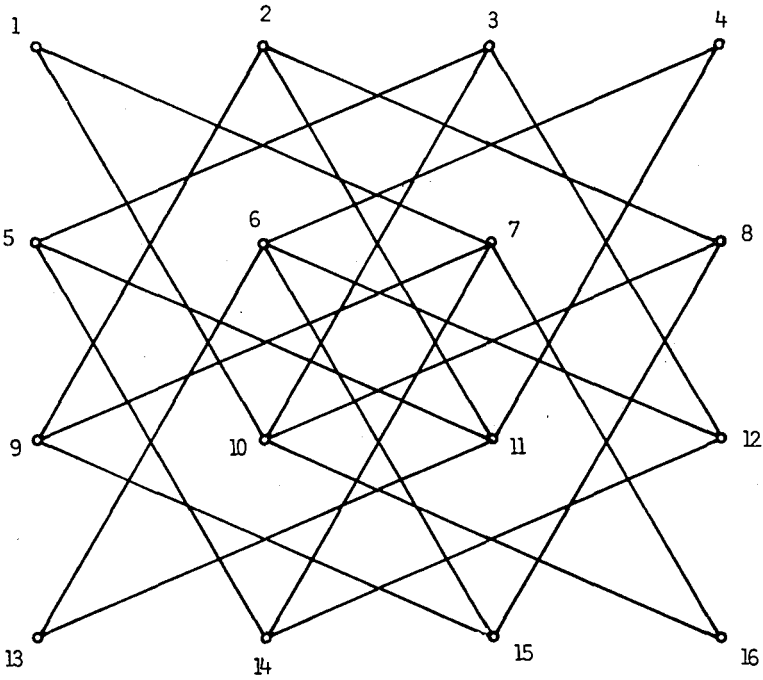
$$m \leq n$$

eşitsizliği doğru olmadığı için, bu çizge Teorem 2.6.1 i sağlamamaktadır.

Hamilton çizgelerinin ilginç bir uygulaması olarak,  $n \times n$  boyutundaki bir satranç tahtası üzerinde, atın yürüşünü düşünelim. Verilen bir  $n$  için, atın tahta üzerindeki bütün yerlerden yalnız bir kez geçmesi sorununu, tahtaya ilişkin ve çakışım ilişkisi atın yürüyüş kuralına göre saptanmış çizgede bir Hamilton çevresinin varlığını incelemek olarak düşünebiliriz. Bu sorunun,  $n$  taksayı için çözümü olamayacağı gözden kaçmamalıdır. Şekil 2.6.2a da  $n = 4$  için bir satranç tahtası, Şekil 2.6.2b de de bu tahtaya ilişkin atın yürüyüşüne göre elde edilen çizge verilmiştir. Bu çizgede bir Hamilton çevresinin varlığını kolayca gösterebiliriz. Şekil 2.6.3  $n = 6$  ve  $n = 8$  için bulunabilecek çözümlere örnekler de verilmiştir.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(a)

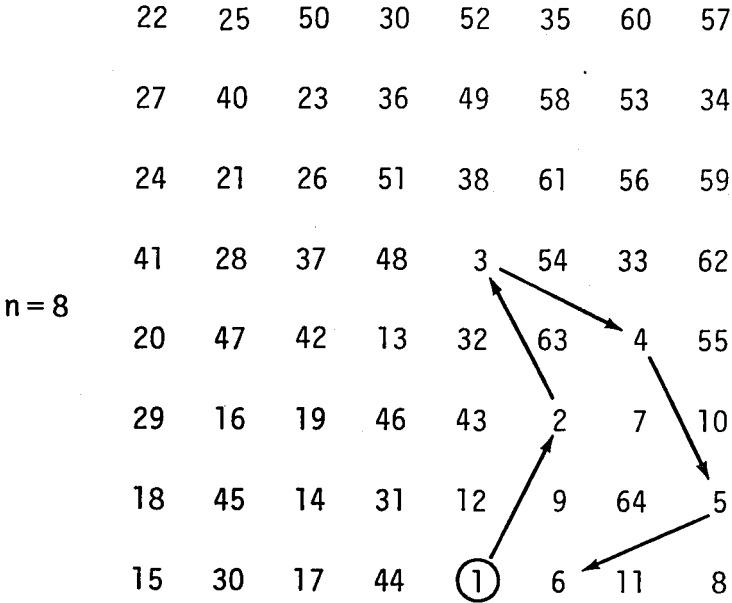
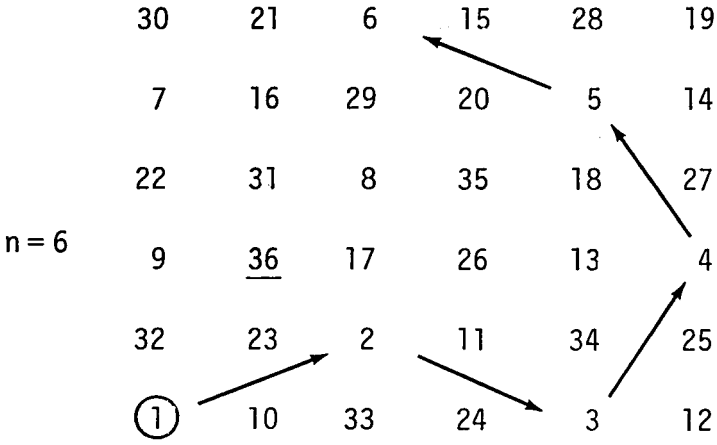


(b)

Şekil 2.6.2  $n=4$  olan bir satranç tahtası ve atın yürüyüşüne ilişkin çizge.

## 2.6 Hamilton çizgeleri

---



Verilen bir çizgede, eğer varsa Hamilton çizgelerinin bulunması, üzerinde çalışılan açık konulardan bir başkasıdır.

Posa Teoreminin doğal bir sonucu olarak, aşağıdaki teoremleri de tanımlayabiliriz.

**Teorem 2.6.2** (Ore)  $d \geq 3$  için,  $k_i$  ve  $k_j$   $\mathcal{C}(d,a)$  daki bitişik olmayan iki düğümün kertesini gösterebilir. Bütün  $i$  ve  $j$  ler için,  
 $k_i + k_j \geq d$   
koşulunun sağlandığı çizgeler, Hamilton çizgesidir.

**Teorem 2.6.3** (Dirac)  $d \geq 3$  olan  $\mathcal{C}(d,a)$  daki bütün düğümler için,  
 $k_i \geq d/2$   
koşulu sağlanıyorsa, çizge bir Hamilton çizgesidir.

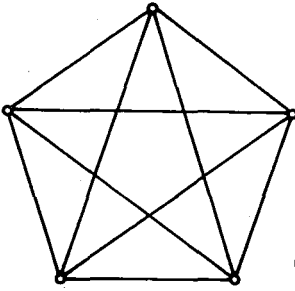
Dolu çizgelerin Hamilton çizgesi olduğu gözden kaçmamalıdır. Böylesine çizgelerdeki Hamilton çevrelerinin sayısına ilişkin aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 2.6.4**  $d \geq 3$  için, düğümlerinin toplamı  $2d-2$  olan dolu çizgelerdeki ortak ayrıtı bulunmayan Hamilton çevrelerinin sayısı

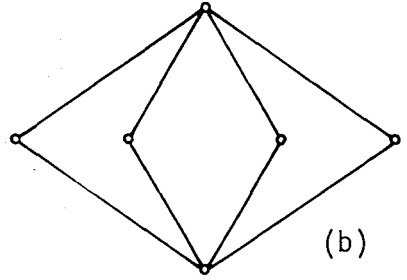
## 2.6 Hamilton çizgeleri

$(d - 1)/2$  dir.

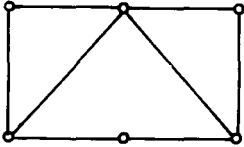
Euler ve Hamilton çizgelerinin birbirlerini önermeyeceği gözden kaçmamalıdır. Şekil 2.6.4 de sırasıyla, hem Euler hem de Hamilton olan, Euler olup Hamilton olmayan, Hamilton olup Euler olmayan ve ne Euler ne de Hamilton olan çizgelere örnek



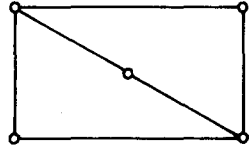
(a)



(b)



(c)



(ç)

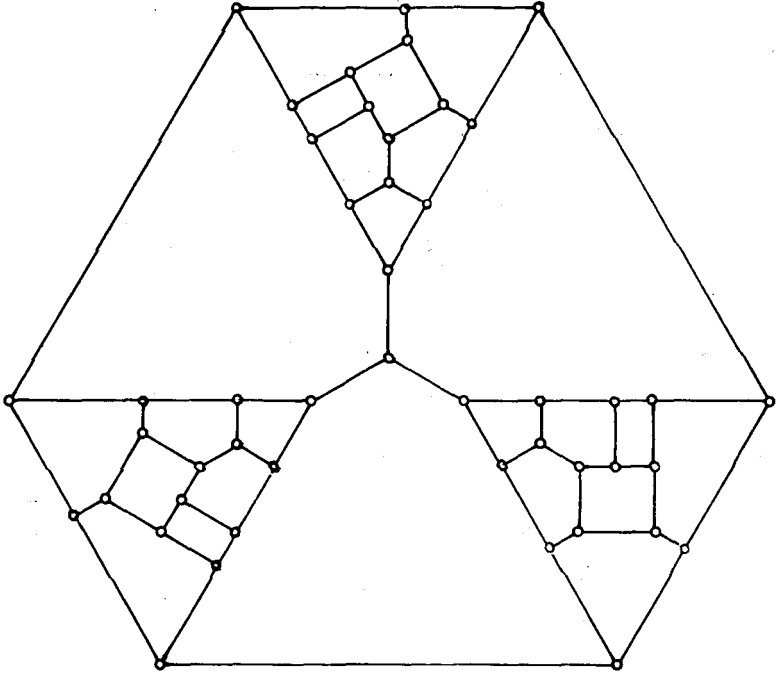
Şekil 2.6.4 Euler/Hamilton çizgelerine örnekler:

a) Hem Euler hem de Hamilton b) Yalnız Euler

c) Yalnız Hamilton ç) Ne Euler ne de Hamilton

verilmiştir. Ayrıtları, düğümlerden başka bir yerde çakışmadan düzleme çizilebilen ( *düzlemsel çizge* diye adlandırılan bu tür çizgelerin ayrıntılarına 4. Bölümde ineceğiz ) ve düğümlerinin kertesisi üçe eşit olan bütün çizgelerin Hamilton çizgesi olduğuna değgin bir sanat vardı

(Tait'e). Ancak bunun doğru olmadığını Tutte, Şekil 2.6.5 de gösterilen çizge ile kanıtladı.



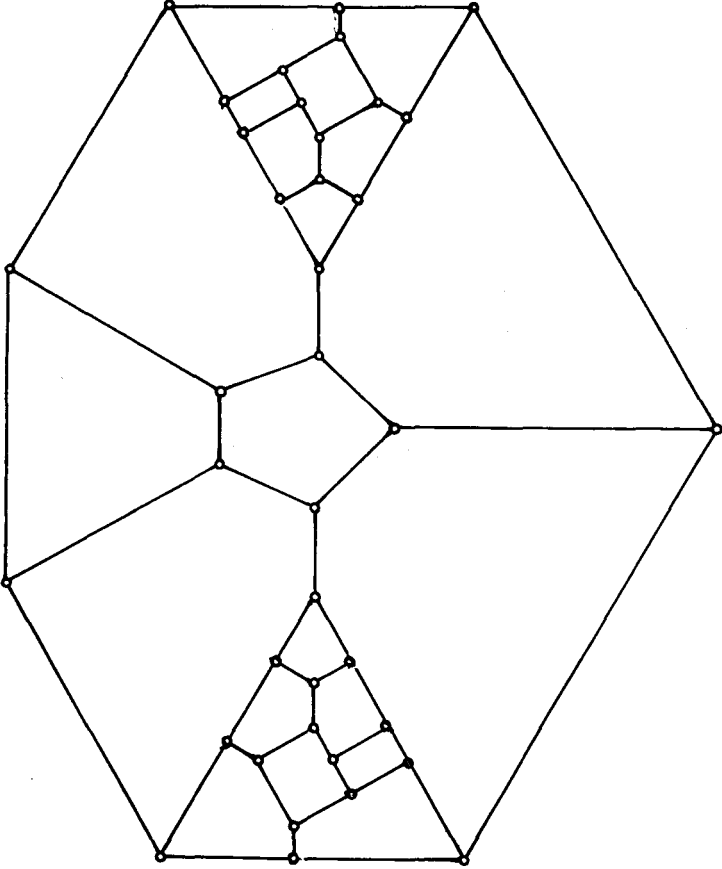
Şekil 2.6.5 Tutte çizgesi.

Taite sanatının koşullarını sağlamakla birlikte, bir Hamilton çizgesi değildir. Tutte çizgesinde 46 düğüm vardır. Şekil 2.6.6 da gösterilen Barnette'in önerdiği 38 düğümlü çizge de Taite sanatını sağlamakla birlikte Hamilton çizgesi değildir (Okuyucu, Taite sanatını sağlamasına karşın Hamilton çizgesi olmayan daha az düğümlü

## 2.6 Hamilton çizgeleri

---

çizgeleri bulmaya çalışmalıdır).



Şekil 2.6.6 Barnette çizgesi.

## 2.7 AYRIT ÇIZGESİ

Köşegen terimleri sıfır ve köşegen dışında kalan terimleri sıfır ya da bir olan bütün bakışumlu matrislerin bir çizgenin indirgenmiş düğüm matrisi olarak düşünülebileceğini biliyoruz. Öyleyse,  $\zeta(d,a)$  nın  $A$  matrisini başka bir çizgenin  $D$  matrisi olarak da düşünebiliriz.

**Tanım 2.7.1**  $A, \zeta(d,a)$  çizgesinin indirgenmiş ayrıt matrisi olsun. İndirgenmiş düğüm matrisi  $A$  ya özdeş olan çizgeye,  $\zeta(d,a)$  nın ayrıt çizgesi denir.

Ayrıt çizgesini, ilgili olduğu çizgeyi de belirterek,  $A \{ \zeta(d,a) \}$  biçiminde göstereceğiz. Tanım 2.7.1 i bu kez ayrıt çizgesi üzerinde yinelersek,  $\zeta(d,a)$  nın ayrıt çizgesinin ayrıt çizgesini (  $\zeta(d,a)$  nın *ikinci düzeyden ayrıt çizgesini* ) tanımlayabiliriz.  $n$  ninci düzeyden ayrıt çizgesini  $A^n \{ \zeta(d,a) \}$  olarak göstereceğiz. Şekil 2.7.1 de  $\zeta$  çizgesi ve bu çizgeye ilişkin birinci ve ikinci düzeyden ayrıt çizgeleri gösterilmiştir.

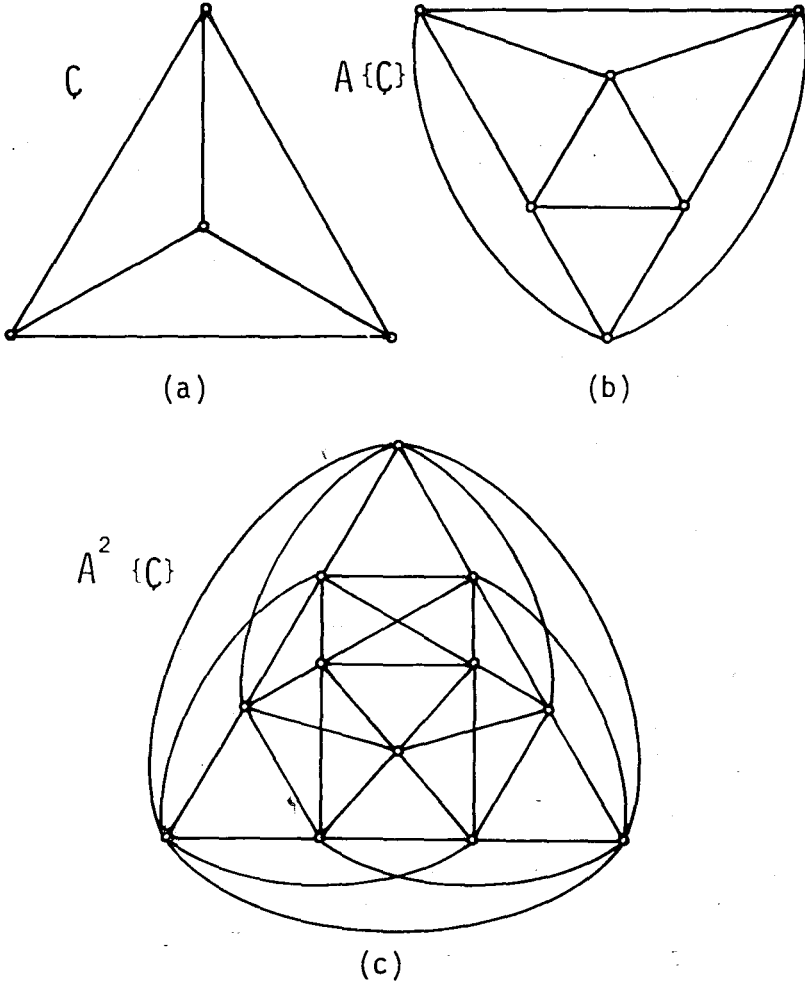
**Teorem 2.7.1**  $d'$  ve  $a'$ ,  $A \{ \zeta(d,a) \}$  daki düğüm ve ayrıt sayısı ise,

$$d' = a \quad a' = -a + \frac{1}{2} \sum_{(i)} k_i^2 \quad \text{dir.}$$



## 2.7 Ayrıt çizgeleri

---



Şekil 2.7.1 a)  $C$  b)  $A\{C\}$ , c)  $A^2\{C\}$

*Tanıt*

Tanımdan, ayrıt çizgesinde  $a$  sayıda düğüm bulunduğu bilinmektedir.  $d_i$  düğümüne çakışık olan  $k_i$  sayıdaki ayrıt,  $A\{C(d,a)\}$  daki ayrıtların

toplamına  $\binom{k_i}{2}$  kadarlık bir katkıda bulunacaktır. öyleysi,

$$\begin{aligned} a &= \sum_{(i)} \binom{k_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{(i)} k_i (k_i - 1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(i)} k_i^2 - a \end{aligned}$$

**Teorem 2.7.2**  $A \{ \zeta(d,a) \}$  nın  $\zeta(d,a)$  ya eşyapılı olabilmesi için gerek ve yeter koşul,  $\zeta(d,a)$  nın bir çevre olmasıdır.

Doğruluğu hemen görülebilen bu teoremin tanıtını okuyucuya bırakıyoruz.

**Teorem 2.7.3** Bağlı  $\zeta_1$  ve  $\zeta_2$  çizgelerinin ayrıt çizgeleri eşyapılı ise ya bu çizgeler de eşyapılıdır ya da  $\zeta_1 = D(3)$  ve  $\zeta_2 = I(1,3)$  dür.

Bu teorem, ayrıt matrisinin gerçekleştirimi incelenirken dolaylı olarak tanıtıldığı için üzerinde durmayacağız. Bir çizgenin ayrıt çizgesi olabilmesi için gerek ve yeter koşullar aşağıdaki teorem ile verilebilir.

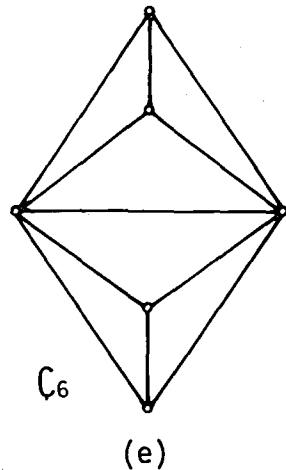
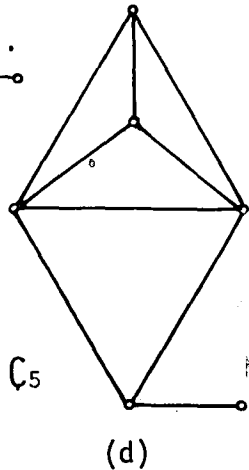
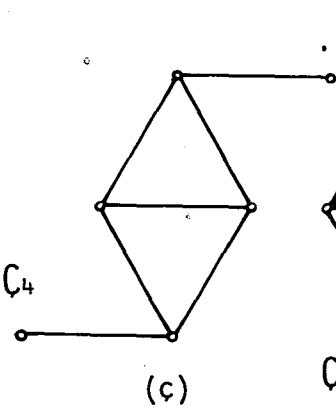
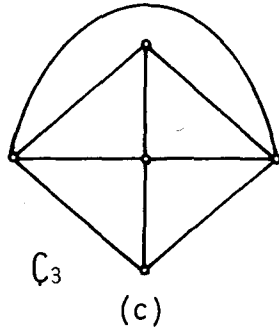
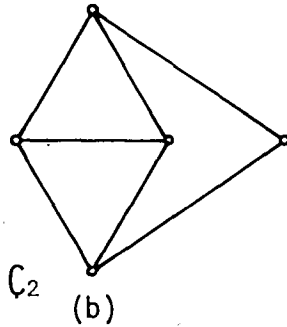
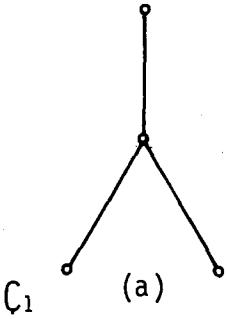
**Teorem 2.7.4** Aşağıdaki koşullar eşdeğerdir :

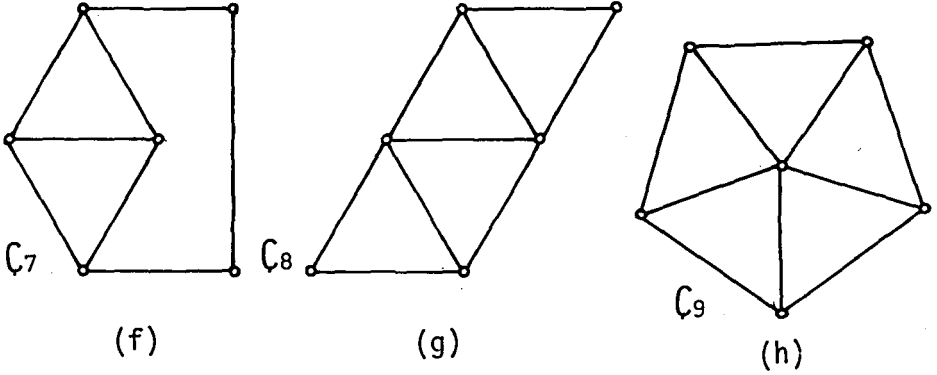
- a)  $\zeta$  bir ayrıt çizgesidir,
- b)  $\zeta$ , her düğüm en çok iki altçizgeye ortak olacak biçimde dolu altçizgelere ayrılabilir,

## 2.7 Ayrıt çizgeleri

c)  $I(1,3)$ ,  $\zeta$  nin ırgıtlımlı altçızıgesi değildir ve eğer iki tek üçgene ortak bir ayrıt varsa, bunların düğümlerinin ırgıttığı altçızıge  $D(4)$  dür,

ç) Şekil 2.7.2 de gösterilen çizgelerden hiçbiri,  $\zeta$  nin ırgıtlımlı altçızıgesi değildir.





Şekil 2.7.2 Ayrıt çizgesinde bulunamayacak irgitilmiş altçizgeler.

Teorem 2.7.4 de *tek üçgenden* anladığımız, eğer  $\zeta(d,a)$  daki bir üçgen altçizgenin  $(D(3))$  teksayıdaki düğümlerine bitiş olan bir düğüm varsa  $D(3)$  *tek üçgen*, başkaca durumlarda  $D(3)$  *çift üçgendir*.

**Tanım 2.7.2**  $\zeta(d,a)$  daki her ayrıtı  $n$  sayıda dizi bağlı ayrıtla değiştirerek elde edilen ve  $\zeta(d,a)_{+n}$  biçiminde gösterilen çizgeye,  $\zeta(d,a)$  nın *n-katlılı çizgesi* denir.

**Tanım 2.7.3**  $A \{ \zeta(d,a)_{+n} \}$  biçiminde gösterilen,  $\zeta(d,a)_{+n}$  nin ayrıt çizgesine,  $\zeta(d,a)$  nın *n-katlılı ayrıt çizgesi* denir.

## 2.7 Ayrıt çizgeleri

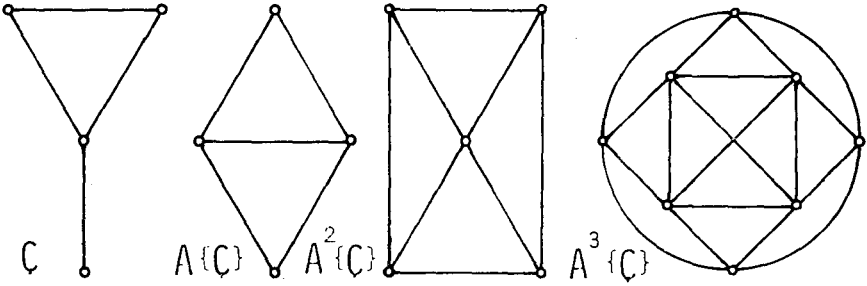
Bu tanımlardan,

$$\zeta(d,a)_{+1} = \zeta(d,a)$$

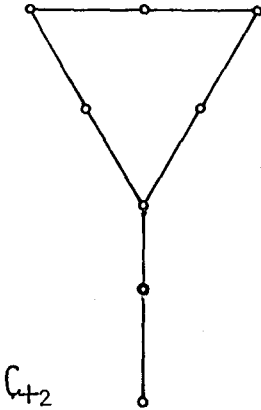
ve genellikle,

$$A^n \{ \zeta(d,a) \} \neq A \{ \zeta(d,a)_{+n} \}$$

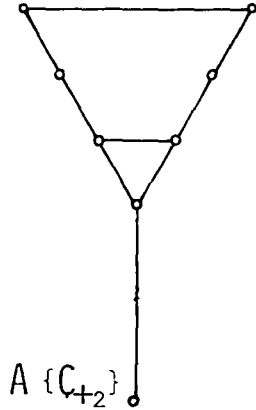
olduğu gözden kaçmamalıdır. Şekil 2.7.3 de ayrıt ve katkılı ayrıt çizgelerine örnekler verilmiştir.

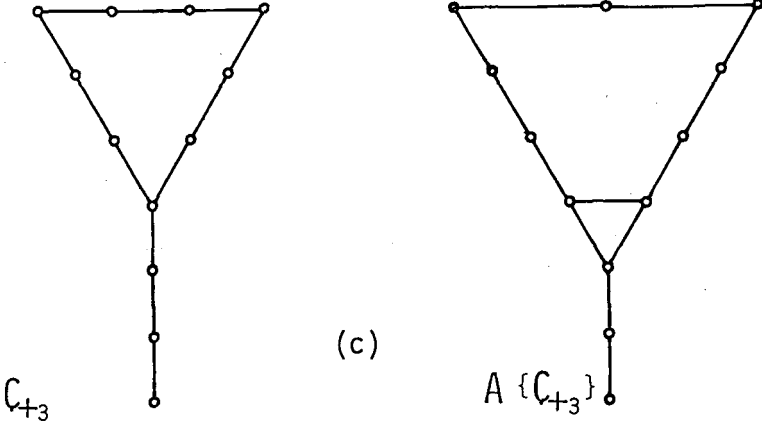


(a)



(b)





Şekil 2.7.3 Ayrıt ve katkılı ayrıt çizgelerine örnekler.

Euler ya da Hamilton çizgesi olma özelliğinin, ayrıt ve katkılı ayrıt çizgeleri üzerinde nasıl etkilendiğine değgin aşağıdaki teoremleri tanıtlamadan vereceğiz.

**Teorem 2.7.5** Eğer  $\mathcal{C}$  Euler çizgesi ise,  $A \{\mathcal{C}\}$  hem Euler hem de Hamilton çizgesidir.

**Teorem 2.7.6** Eğer  $\mathcal{C}$  Hamilton çizgesi ise,  $A \{\mathcal{C}\}$  de Hamilton çizgesidir.

Bu teormelerin terslerinin doğru olmadığı gözden kaçmamalıdır. Başka bir deyişle,  $A \{\mathcal{C}\}$  ninhem Euler hem de Hamilton çizgesi olması,  $\mathcal{C}$  nin Euler çizgesi olacağı anlamına gelmez. Örneğın,

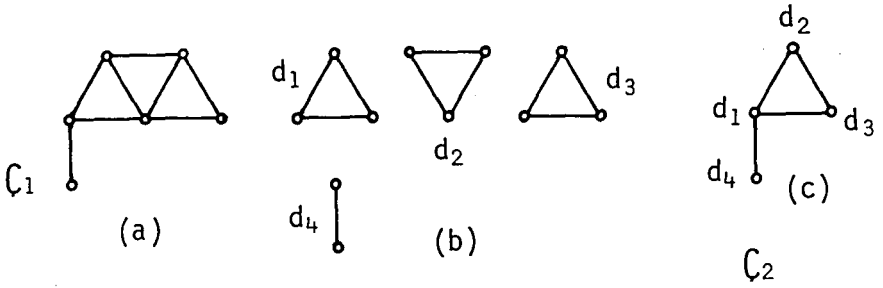
Şekil 2.7.1b deki çizgenin hem Euler hem de Hamilton olmasına karşın, Şekil 2.7.1a daki çizge Euler çizgesi değildir.

**Teorem 2.7.7**  $\mathcal{C}$  nin Hamilton çizgesi olabilmesi için yeter koşul  $A \{C_{+2}\}$  nin Hamilton çizgesi olması, gerek koşul ise  $A \{\mathcal{C}\}$  nin Hamilton çizgesi olmasıdır.

**Teorem 2.7.8**  $\mathcal{C}$  nin Euler çizgesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul,  $A \{C_{+3}\}$  ün Hamilton çizgesi olmasıdır.

**Teorem 2.7.9** Yol olmayan bağlı  $\mathcal{C}(d,a)$  çizgesinde her  $n \geq d - 3$  için,  $A^n \{\mathcal{C}(d,a)\}$  bir Hamilton çizgesidir.

Bu altbölümde, başka anlamıyla, bir çizgenin işlevi olarak tanımlanan çizgeleri inceledik. Daha açık bir deyişle, gerek ayrıt gerekse katkılı ayrıt çizgeleri, bir çizgenin belli özelliklerine ve öğelerine dayanılarak türetilen *işlevsel çizgelerdir*. Bu tür çizgelere başka bir örnek olarak Şekil 2.7.4a daki  $\mathcal{C}_1$  çizgesini düşünelim. Şekil 2.7.4b de  $\mathcal{C}_1$  in olabilecek en çok ayrıtı içeren dolu altçizgeleri gösterilmiştir. Her dolu altçizgeyi bir düğüm olarak düşünürsek, bu düğümlerin çakışım ilişkisinden  $\mathcal{C}_1$  in örgütü diye



Şekil 2.7.4  $\mathcal{C}_1$  ve örgütü  $\mathcal{C}_2$ .

adlandıracağımız başka bir işlevsel çizge elde ederiz (Şekil 2.7.4c). Ayrıt çizgesinin, örgüt çizgenin bir özel durumu olduğu gözden kaçmamalıdır (ayrıt çizgesi türetilirken  $\mathcal{C}$ ,  $D(2)$  olan dolu altçizgelere ayrılmış olarak da düşünülebilir).

Genel anlamıyla işlevsel çizgeler, bir çizgeye ilişkin özellikleri daha da açık biçimde ortaya koyar. Kerte, uzaklık, çap, özek vb. kavramları, genellikle düğümleri göz önüne alarak tanımladık. İşlevsel çizgeleri düşünürsek, bu kavramları daha başka çizge öğelerine ilişkin olarak da tanımlayabileceğimizi görürüz. Örneğin ayrıt çizgesindeki düğüm kertesini ya da uzaklığı, çizgedeki *ayrıt kertesini* ya da *ayrıt uzaklığı* tanımını da kendiliğinden yapacaktır. Bundan



## 2.7 Ayrıt çizgeleri

---

sonra inceleyeceğimiz konularda da işlevsel çizgeleri sürekli düşünebileceğimiz ve bütün bu kavramları başka çizge öğeleri üzerinde de tanımlayabileceğimiz unutulmamalıdır.

### 3. BÖLÜM

## ÇEVRE, KESİTLEME, AĞAÇ ve İLİŞKİN KAVRAMLAR

### 3.1 ALTÇİZGE YIĞINLARI

Euler çizgesinin, ortak ayrıtsız çevrelerin birleşiminden oluştuğunu biliyoruz.  $\zeta(d,a)$  nın, ortak ayrıtsız çevrelerin birleşiminden oluşan altçizgesine de Euler Çizgesi diyeceğiz. Bundan böyle de *alt* önekini açıkça belirtmeden, Euler çizgesi deyince  $\zeta(d,a)$  nın Euler niteliğindeki bir altçizgesinden söz etmiş olacağız. Ayrıca bu bölümde, inceleyeceğimiz çizgelerdeki koşul bağıli ayrıtların varlığına değgin herhangi bir kısıtlamada da bulunmayacağız.

**Teorem 3.1.1**  $E_1$  ve  $E_2$   $\zeta(d,a)$  daki iki Euler çizgesi ise,

$$E_1 \oplus E_2 = E_3$$

olarak tanımlanan  $E_3$  de  $\zeta(d,a)$  içinde bir Euler çizgesidir.

*Tanıt*

$\zeta_1$  ve  $\zeta_2$  sırasıyla  $E_1$  ve  $E_2$  de ortak ayrıtlı iki çevreyi gösterebilirsin.

### 3.1 Altçizge yığınları

---

$$\zeta_1 \oplus \zeta_2 = \zeta_3$$

olarak tanımlanan  $\zeta_3$ , bu ortak ayrıtları içermeyen yeni bir çevre oluşturacaktır.

Eğer  $\zeta_1$  ve  $\zeta_2$  ortak ayrıtsız ise, ya ortak bir düğümleri vardır ya da hiçbir bağıları yoktur. Her iki durumda da bu çevreler  $\oplus$  altında ya bir çevre ya da bir çevre yığını verecektir.

Bu gözlem,  $E_1$  ve  $E_2$  nin bütün çevreleri için doğrudur. Öyleyse  $E_3, \zeta(d,a)$  içinde bir Euler çizgesidir. ■

Bu teoremi genelleştirirsek,  $\zeta(d,a)$  içindeki  $n$  sayıda Euler çizgesinin  $\oplus$  altında tanımladığı

$$E_0 = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$$

$E_0$  çizgesinin de bir Euler çizgesi olacağı hemen görülür.

$\{\mathcal{E}\}$ ,  $\zeta(d,a)$  daki bütün Euler çizgelerinin yığını olsun.  $\phi$  nin de bir Euler çizgesi olduğunu ve bu yığının içinde bulunacağını unutmamalım. Öyleyse  $\{\mathcal{E}\}$  için,  $E_i, E_j, E_k \in \{\mathcal{E}\}$  ise :

a)  $E_i \oplus E_j = E_j \oplus E_i \in \{\mathcal{E}\}$

b)  $\phi \oplus E_i = E_i$

c)  $E_i \oplus E_i = \phi$

c)  $E_i \oplus (E_j \oplus E_k) = (E_i \oplus E_j) \oplus E_k$

özelliklerinin geçerli olduğu hemen görülebilir. Ayrıca, bu dört özelliği sağlayan yığınların bir *Abel topluluğu* oluşturduğunu da biliyoruz. Öyleyse aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.1.2**  $\mathcal{C}(d,a)$  daki  $\{\mathcal{E}\}$  yığını  $\oplus$  işlemi altında bir *Abel topluluğu* oluşturur.

Bir topluluğun, öbür öğelerini bulmak için gerekli en az sayıdaki öğeye, topluluğun *üreteçleri* diyeceğiz. İlerdeki altbölümlerde, ağaç kavramını ve  $t$ -çevre tanımını verdikten sonra  $\{\mathcal{E}\}$  topluluğunun üreteçleri kendiliğinden ortaya çıkacaktır.

**Teorem 3.1.3**  $Y_1$  ve  $Y_2$ ,  $\mathcal{C}(d,a)$  da  $d_i$  ve  $d_j$  düğümleri arasındaki iki yol ise,  $Y_1 + Y_2$  bir Euler çizgesidir.

*Tanıt*

$a_0$ ,  $d_i$  ve  $d_j$  düğümleri arasına eklenen bir ayrıt olsun.  $a_0$  ayrıtının eklenmesiyle oluşan çizmeyi,

$$C_0 = C \cup a_0$$

olarak gösterelim. Öyleyse,

$$Y_1 \cup a_0 \quad \text{ve} \quad Y_2 \cup a_0$$

### 3.1 Altçizge yığınları

$\zeta_0$  içinde iki Euler çizgesidir.

$$(Y_1 \cup a_0) \oplus (Y_2 \cup a_0) = Y_1 \oplus Y_2$$

ise hem  $\zeta_0$  hem de  $\zeta$  içinde bir Euler çizgesidir. ■

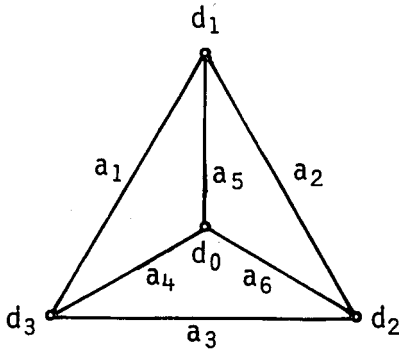
Teorem 3.1.3 ün bir genellemesi olarak,  $d_i$  ve  $d_j$  düğümleri arasında  $2n$  sayıdaki yolların da  $\oplus$  altında bir Euler çizgesi oluşturacağını gösterebiliriz. Bu özellikleri Şekil 3.1.1 de gösterilen çizge üzerinde açıklayalım.

$$E_1 = (a_1, a_4, a_5)$$

$$E_2 = (a_2, a_5, a_6)$$

$$E_3 = (a_3, a_4, a_6)$$

$\zeta(4,6)$  çizgesindeki üç ayrı Euler çizgesidir.



Şekil 3.1.1 E ve Y altçizgelerinin  $\oplus$  altındaki özelliklerinin açıklanması.

### 3. BÖLÜM

$$E_4 = E_1 \oplus E_2 = (a_1, a_2, a_4, a_6)$$

$$E_5 = E_1 \oplus E_3 = (a_1, a_3, a_5, a_6)$$

$$E_6 = E_2 \oplus E_3 = (a_2, a_3, a_4, a_5)$$

$$E_7 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\phi = E_i \oplus E_j \quad (1 \leq i \leq 7)$$

çizgede bulunan öbür Euler çizgeleridir.

$d_1$  ve  $d_2$  düğümleri arasındaki yolları,

$$Y_1 = (a_2)$$

$$Y_2 = (a_5, a_6)$$

$$Y_3 = (a_3, a_4, a_5)$$

$$Y_4 = (a_1, a_3)$$

$$Y_5 = (a_1, a_4, a_6)$$

olarak yazabiliriz. Yukarıda sıraladığımız Euler çizgelerinin, aşağıdaki toplamlardan birine eşit olacağı görülecektir:

$$Y_1 \oplus Y_2$$

$$Y_1 \oplus Y_4$$

$$Y_2 \oplus Y_3$$

$$Y_2 \oplus Y_5$$

$$Y_3 \oplus Y_5$$

$$Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3 \oplus Y_4$$

$$Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_4 \oplus Y_5$$

$$Y_2 \oplus Y_3 \oplus Y_4 \oplus Y_5$$

$$Y_1 \oplus Y_3$$

$$Y_1 \oplus Y_5$$

$$Y_2 \oplus Y_4$$

$$Y_3 \oplus Y_4$$

$$Y_4 \oplus Y_5$$

$$Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3 \oplus Y_5$$

$$Y_1 \oplus Y_3 \oplus Y_4 \oplus Y_5$$

### 3.1 Altçizge yığınları

---

**Tanım 3.1.1** Yalnız iki düğümünün kertesı teksayı öbür düğümlerinin kertesı çiftsayı olan çizgelere, *M-çizgesi* denir.

*M-çizgesinde*, kertesı teksayı olan düğümlere uç düğümleri diyeceğiz. Uç düğümleri de belirterek böylesine çizgeleri  $M_{i,j}$  olarak da gösterebiliriz. *M-çizgesi için* bağıllık gerekli olmadığından, *gezinin* özel bir *M-çizgesi* olduğu anlaşılır. Tanım 3.1.1 den, *M-çizgesinin* ya bir yoldan ya da bir yol ile çevrelerin ortak ayrıtırsız birleşiminden oluştuğunu görürüz.

**Teorem 3.1.4**  $M_1$  ve  $M_2$ ,  $\mathcal{C}(d,a)$  da uç düğümleri özdeş olan iki yarı *M-çizgesi* ise,  $M_1 \oplus M_2$   $\mathcal{C}(d,a)$  içinde bir Euler çizgesidir.

*Tanıt*

$a_0$  ayrıtı, *M-çizgesinin* uç düğümleri arasına eklendiğinde bir Euler çizgesi oluşacaktır. Öyleyse Teorem 3.1.3 ün tanıtında olduğu gibi,

$$(M_1 \cup a_0) \oplus (M_2 \cup a_0) = M_1 \oplus M_2$$

bir Euler çizgesidir. ■

**Teorem 3.1.5**  $M$  ve  $E$ ,  $\mathcal{C}(d,a)$  daki bir *M-çizgesi* ile bir Euler çizgesini gösterebilirsin.

$$M \oplus E = M_1$$

$\zeta(d,a)$  daki başka bir  $M$ -çizgesidir.

*Tanıt*

$M$ -çizgesinin,

$$M = Y \oplus E_1$$

olarak yazıldığını düşünelim. Öyleyse,

$$\begin{aligned} M \oplus E &= Y \oplus E_1 \oplus E \\ &= Y \oplus E_2 \\ &= M_1 \end{aligned}$$

$d_i$  ve  $d_j$  düğümleri arasındaki bütün yolların ve  $M$ -çizgelerinin oluşturduğu yığınları sırasıyla,  $\{Y_{ij}\}$  ve  $\{M_{ij}\}$  olarak gösterelim.

$$\{M_{ij}\} \quad \{Y \oplus E : Y \in \{Y_{ij}\}, E \in \{E_{ij}\}\}$$

eşitliğinden ve yukardaki teoremlerden, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.1.6**  $\{M_{ij}, E\}$  yığını  $\oplus$  altında bir Abel topluluğu oluşturur.

Şekil 3.1.1 deki çizgeye ilişkin  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  ve  $Y_5$  yollarının  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$  ve  $E_7$  çizgeleri ile  $\oplus$  altında,  $d_1$  ve  $d_2$  düğümleri arasındaki bütün  $M_{12}$ -çizgelerini vereceğini gösterebiliriz.



### 3.1 Altçizge yığılıları

---

Euler çizgeleri yığılıları özelliklerine benzer özellikler, yol yığılıları içinde verilebilir. Ancak, ayrıntılara inmeden önce iki yeni işlemin açıklamasını yapalım.

$\mathcal{W}$ , kümelerden oluşmuş bir yığılıyı göstereyin,  $\mathcal{W}$  üzerine uygulanan ve  $\text{in } \mathcal{W}$  diye göstereceğimiz *indirgeme işlemi* aşağıdaki gibi tanımlanır:

Eğer  $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$  ve  $W_1 \subset W_2$  ise,  $W_1$  in boş küme olmaması koşulu altında,

$$W_1 \in \text{in } \mathcal{W} \quad \text{ve} \quad W_2 \notin \text{in } \mathcal{W}$$

Buradan  $\text{in } \mathcal{W}$ ,  $\mathcal{W}$  nun bir alt yığılıdır.  
Örneğin,

$$\mathcal{W} = \{\phi, (ab), (abc) (bcd) (ef) (aef) \\ (e) (bf)\}$$

yığılıyı düşünelim.

$$(ab) \subset (abc) \quad (e) \subset (ef) \quad \text{ve} \quad (e) \subset (aef)$$

ilişkilerinden dolayı

$$\text{in } \mathcal{W} = \{\phi (ab) (bcd) (e) (bf)\}$$

olacağı görülür.

**Teorem 3.1.7**  $\{\mathcal{E}\}$  ve  $\{\mathcal{G}\}$ ,  $\mathcal{C}(d,a)$  daki bütün Euler çizgelerinin ve çevrelerin

yığılı ise

$$\text{in } \{ \mathcal{E} \} = \{ \mathcal{G} \}$$

Benzer olarak,

**Teorem 3.1.8**  $\{ \mathcal{M}_{ij} \}$  ve  $\{ \mathcal{Y}_{ij} \}$ ,  $\zeta(d, a)$  nın  $d_i$  ve  $d_j$  düğümleri arasındaki bütün  $M$ -çizgelerinin ve yolların yığılı ise,

$$\text{in } \{ \mathcal{M}_{ij} \} = \{ \mathcal{Y}_{ij} \}$$

Her iki teoremin tanıtlanması okuyucuya bırakıyoruz.

**Tanım 3.1.2** Kümelerin oluşturduğu  $\{ \mathcal{A} \}$  ve  $\{ \mathcal{B} \}$  yığılılarının  $\{ \mathcal{A} \} \otimes \{ \mathcal{B} \}$  biçiminde gösterilen çember çarpımı

$$\{ \mathcal{A} \} \otimes \{ \mathcal{B} \} = \text{in } \{ \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \};$$

$$A \in \{ \mathcal{A} \}, B \in \{ \mathcal{B} \}$$

olarak tanımlanır.

$\otimes$  işlemini açıklamak için aşağıdaki örneği düşünelim.

$$\{ \mathcal{A} \} = \{ (ab) (ac) (c) (abc) \}$$

$$\{ \mathcal{B} \} = \{ (a) (bc) (ac) \}$$

### 3.1 Altçizge yığınları

$$\begin{aligned}
 \{A\} \otimes \{B\} &= \text{in } \{ (ab) \oplus (a), (ab) \oplus (bc), (ab) \oplus (ac) \\
 &\quad (ac) \oplus (a), (ac) \oplus (bc), (ac) \oplus (ac) \\
 &\quad (c) \oplus (a), (c) \oplus (bc), (c) \oplus (ac) \\
 &\quad (abc) \oplus (a), (abc) \oplus (bc), (abc) \oplus (ac) \} \\
 &= \text{in } \{ (b) (ac) (bc) \\
 &\quad (c) (ab) \phi \\
 &\quad (ac) (b) (a) \\
 &\quad (bc) (a) (b) \} \\
 &= \text{in } \{ \phi (a) (b) (c) (ac) (bc) (ab) \} \\
 &= \{ \phi (a) (b) (c) \}
 \end{aligned}$$

$\otimes$  işlemi altında,  $\{y_{ij}\}$  ve  $\{G\}$  yığınları arasındaki ilişkileri teoremler biçiminde aşağıdaki gibi veriliriz.

**Teorem 3.1.9** Parçalanamaz (eklem düğümsüz) çizgelerde,

$$\{y_{ij}\} \otimes \{y_{ij}\} = \{G\}$$

$$\text{Teorem 3.1.10 } \{G\} \otimes \{G\} = \{G\}$$

$$\text{Teorem 3.1.11 } \{y_{ij}\} \otimes \{G\} = \{y_{ij}\}$$

$$\text{Teorem 3.1.12 } \{y_{i_1 j_1}\} \otimes \{y_{j_1 j_2}\} \otimes \dots \otimes \{y_{j_{n-1} j_n}\} = \{y_{i_1 j_n}\}$$

**Tanım 3.1.3** İçinde tekdüğüm ve çevre bulunmayan çizgelere Z-çizgesi denir.

Z-çizgesindeki düğümlerin bir bölümünün kertesi teksayı, öbür bölümünün kertesi ise çiftsayı olacaktır. Kerteleri teksayı olan düğümleri belirtecek biçimde, Z-çizgelerini  $Z_{(i_1, i_2, \dots, i_n)}$  olarak göstereceğiz. Çok uzun olduğu için tanımlanmalarını okuyucuya bırakarak, Z-çizgesi yığınlıklarına ilişkin sonuçları aşağıdaki gibi verebiliriz.

**Teorem 3.1.13**  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ ,  $\zeta(d, a)$  daki düğümlerin bir bölümü olsun.

$$I = (i_1, i_2) \oplus (i_3, i_4) \oplus \dots \oplus (i_{n-1}, i_n)$$

ise,

$$\{ \mathcal{Y}_{i_1 i_2} \} \otimes \{ \mathcal{Y}_{i_3 i_4} \} \otimes \dots \otimes \{ \mathcal{Y}_{i_{n-1} i_n} \} = \{ \mathcal{Z}_I \}$$

**Teorem 3.1.14**  $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$   
ve

$$J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$$

$\zeta(d, a)$  daki düğümlerin iki altkümesi ise,

$$\{ \mathcal{Z}_I \} \otimes \{ \mathcal{Z}_J \} = \{ \mathcal{Z}_{J \circ I} \}$$

$\zeta(d, a)$  daki düğümlerin sayısının  $d$  olduğunu biliyoruz  $\left[ \frac{d}{2} \right]$ ,  $d/2$  ye en yakın ama ondan büyük olmayan tamsayıyı gösterebiliriz.

$$r = 1, 2, \dots, \left[ \frac{d}{2} \right]$$

için,

### 3.1 Altçizge yığılıları

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{2r} \leq n$$

düğümde oluşan bütün z-çizgeleri yığılıları  $\{Z\}$  ile gösterelim. Burada  $\{Z\}$  nin, yığılılardan oluşan bir üstyığılı (yığılıların yığılı) olduğu gözden kaçmamalıdır. Bu üstyığılına,  $\{Q\}$  yığılıları da eklersek,

$$\mathcal{S} = \{ \{Z\}, \{Q\} \}$$

üstyığılıları elde ederiz.  $\mathcal{U}_1$ ,  $\mathcal{U}_2$  ve  $\mathcal{U}_3$   $\mathcal{S}$  içindeki üç yığılı ise :

$$a) \mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_1 \in \mathcal{S}$$

$$b) \mathcal{U}_1 \otimes Q = \mathcal{U}_1$$

$$c) \mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_1 = \{Q\}$$

$$ç) (\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_3)$$

olacağı gösterilebilir (gösteriniz). Bu gözlemden de aşağıdaki sonuca varırız.

**Teorem 3.1.15**  $\otimes$  altında,  $\mathcal{S}$  bir Abel topluluğu tanımlar.

**Tanım 3.1.4** Çıkarıldıklarında, çizgenin parça sayısını bir arttıran ve bu özelliğın herhangi bir altkumesinde bulunmadığı ayrıt kümesine (K) kesitleme denir.

Bağlı çizgelerdeki kesitlemelerden birinin

çıkarılması, çizgenin iki parçaya parçalanması anlamına gelecektir. Tanım 3.1.4 den, çizgedeki her ayrıta ilişkin en az bir kesitleme bulunduğu gözden kaçmamalıdır. Kesitlemelerle ilgili tartışmamızı yaparken, değişik bir ayrıt gösterimi kullanacağız.  $\Delta_1$  düğümlerin bir altkümesini,  $\bar{\Delta}_1$  ise ilişkin tümler altkümeyi gösterecektir.

$$A(\Delta_1 \times \bar{\Delta}_1), A(\Delta_1 \times \Delta_1), A(\bar{\Delta}_1 \times \bar{\Delta}_1)$$

sırasıyla, uç düğümlerinden biri  $\Delta_1$  öbürü  $\bar{\Delta}_1$  kümelerinde, uç düğümleri  $\Delta_1$  kümesinde ve uç düğümleri  $\bar{\Delta}_1$  kümesinde olan ayrıtları gösterecektir. Örneğin, Şekil 3.1.1 deki çizge için

$$\Delta_1 = (d_0, d_1) \text{ ve } \bar{\Delta}_1 = (d_2, d_3)$$

dersek,

$$A(\Delta_1 \times \Delta_1) = (a_5)$$

$$A(\Delta_1 \times \bar{\Delta}_1) = (a_1, a_2, a_4, a_6)$$

$$\bar{A}(\bar{\Delta}_1 \times \bar{\Delta}_1) = (a_3)$$

ayrıtların kümelerini tanımlayacaktır. Bu gösterime göre dolu çizgeler için,  $A(\Delta_1 \times \bar{\Delta}_1)$  kümesinin bir kesitleme oluşturacağı görülebilir. Bu gözlemin bir uzantısı, aşağıdaki gibi yapılabilir.  $K_1$  ve  $K_2$ , dolu çizgedeki iki kesitleme olsun. Öyleyse,

$$K_1 = A(\Delta_1 \times \bar{\Delta}_1) \text{ ve } K_2 = A(\Delta_2 \times \bar{\Delta}_2)$$

### 3.1 Altçizge yığılıları

yazabiliriz. Ayrıca, çizgenin düğüm kümesini  $\Delta$  ile gösterirsek bu kesitlemeleri,

$$K_1 = A(\Delta_1 \times \bar{\Delta}_1) = A(\Delta \times \Delta) \oplus A(\Delta_1 \times \Delta_1) \oplus A(\bar{\Delta}_1 \times \bar{\Delta}_1)$$

$$K_2 = A(\Delta_2 \times \bar{\Delta}_2) = A(\Delta \times \Delta) \oplus A(\Delta_2 \times \Delta_2) \oplus A(\bar{\Delta}_2 \times \bar{\Delta}_2)$$

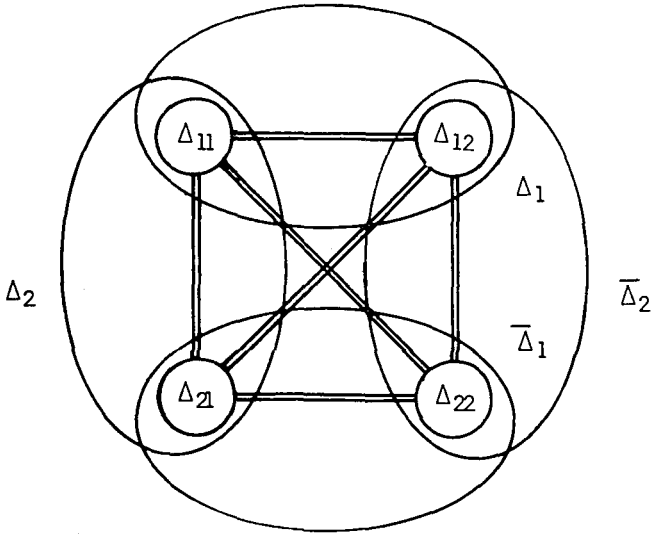
biçiminde de yazabiliriz.  $\Delta_1$  ve  $\Delta_2$  nin,

$$\Delta_1 = \Delta_{11} \cup \Delta_{12}$$

$$\bar{\Delta}_1 = \Delta_{21} \cup \Delta_{22}$$

$$\Delta_2 = \Delta_{11} \cup \Delta_{21}$$

biçiminde altkümelere ayrıldığını düşünelim (Şekil 3.1.2). Öyleyse,



Şekil 3.1.2 Düğüm kümesinin dört altkümeye ayrılması.

$$\begin{aligned}
 K_1 \oplus K_2 &= A(\Delta_1 \times \Delta_1) \oplus A(\bar{\Delta}_1 \times \bar{\Delta}_1) \oplus A(\Delta_2 \times \Delta_2) \oplus A(\bar{\Delta}_2 \times \bar{\Delta}_2) \\
 &= A(\Delta_{11} \mathbf{U} \Delta_{12} \times \Delta_{11} \mathbf{U} \Delta_{12}) \oplus A(\Delta_{21} \mathbf{U} \Delta_{22} \times \Delta_{21} \mathbf{U} \Delta_{22}) \\
 &\quad + A(\Delta_{11} \mathbf{U} \Delta_{21} \times \Delta_{11} \mathbf{U} \Delta_{21}) \oplus A(\Delta_{12} \mathbf{U} \Delta_{22} \times \Delta_{12} \mathbf{U} \Delta_{22}) \\
 &= A(\Delta_{11} \times \Delta_{12}) \oplus A(\Delta_{21} \times \Delta_{22}) \oplus A(\Delta_{11} \times \Delta_{21}) \oplus A(\Delta_{12} \times \Delta_{22})
 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Buradaki dört kesitlemenin ortak bir ayrıtı bulunmadığı için,

$$\begin{aligned}
 K_1 \oplus K_2 &= A(\Delta_{11} \mathbf{U} \Delta_{22} \times \Delta_{21} \mathbf{U} \Delta_{12}) \\
 &= A(\Delta_3 \times \bar{\Delta}_3)
 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada,

$$\Delta_3 = \Delta_{11} \mathbf{U} \Delta_{22}$$

olarak tanımlanmıştır. Demek ki dolu bir çizgedeki iki kesitlemenin çember toplamları, başka bir kesitleme vermektedir. Yukarda izlediğimiz yolun benzeri bir yol izleyerek aşağıdaki teoremi de tanımlayabiliriz (tanımlayınız).

**Teorem 3.1.16**  $K_1$  ve  $K_2$ ,  $\zeta(d,a)$  daki iki kesitleme olsun.

$$K = K_1 \oplus K_2$$

kümesi ya bir kesitleme ya da ortak ayrıtısız kesitlemelerin birleşiminden oluşan bir kesitlemeler kümesidir.



### 3.1 Altçizge yığılıları

Örneğin, Şekil 3.1.3 deki çizmeyi düşünelim.

$(a_1, a_2, a_3)$  kümesi de çizmeyi iki parçaya parçalayacağından bu çizgedeki  $(a_1, a_2, a_3, a_6)$  kümesi bir kesitleme değildir. Çizmeyi üç parçaya parçalayacağından,  $(a_3, a_4, a_7)$  kümesi de bir kesitleme değildir. Beri yanda,

$$K_1 = (a_3, a_4)$$

$$K_2 = (a_7)$$

$$K_3 = (a_1, a_2, a_4)$$

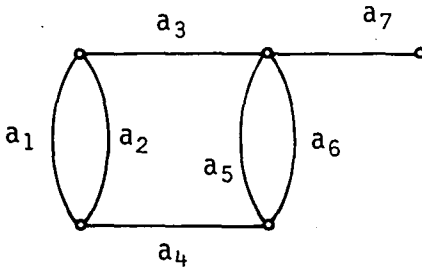
kümelere birer kesitlemedir.

$$\begin{aligned} K_4 &= K_1 \oplus K_3 \\ &= (a_1, a_2, a_3) \end{aligned}$$

kümesi de bir kesitlemedir.

$$\begin{aligned} K_5 &= K_1 \oplus K_2 \\ &= (a_3, a_4, a_7) \end{aligned}$$

ise ortak ayrıtırsız iki kesitlemeden oluşan bir kümedir.



Şekil 3.1.3 Kesitleme kavramının açıklanması.

$\{\mathcal{K}\}$  bütün kesitlemelerin ortak ayrıtırsız kesitlemelerin birleşiminin ve  $\phi$  nin tanımladığı bir yığılı gösterisin.

**Teorem 3.1.17**  $\oplus$  altında,  $\{\mathcal{K}\}$  bir Abel topluluğu oluşturur.

Çakışım kümesinin de bir kesitleme olduğu ve kesitlemelerle ilgili sonuçların çakışım kümeleri için de geçerli olduğu gözden kaçmamalıdır.

## 3.2 AĞAÇ VE İLİŞKİN KAVRAMLAR

Özellikle uygulaması bakımından, en önemli altçizge türü A ile göstereceğimiz *ağaçtır*.

**Tanım 3.2.1** Bağlı bir çizgenin bütün düğümlerini içeren ve içinde çevre bulundurmeyen bağlı altçizgeye ağaç denir.

Bu tanımdan, ağacın özel bir Z-çizgesi olacağı gözden kaçmamalıdır. Şekil 3.2.1 deki(s.133) çizgenin bir ağacı kalın çizgilerle belirtilmiştir. Kendisi ağaç olan çizgelerin ana özelliği aşağıdaki teoremle saptanabilir.

**Teorem 3.2.1** Bağlı bir çizgenin ağaç olabilmesi için gerek ve yeter koşul, bütün düğüm çiftleri arasında yalnız tek bir yol bulunmasıdır.

*Tanıt*

*Gerek Koşul :*

$\mathcal{C}$  nin ağaç olması, her düğüm çifti arasında yalnız bir yol bulunduğu anlamına gelecektir. Bunun doğru olmadığını düşünelim.  $\mathcal{C}$  deki  $d_i$  ve  $d_j$  düğümleri arasında  $Y_i$  ve  $Y_j$  olarak iki ayrı yol bulunsun.

$Y_i \cup Y_j$

altçizge, ortak ayrıtızsız çevrelerden oluşacaktır. Bu da ağaç tanımı ile çelişir. Demek ki her düğüm çifti arasında yalnız bir yol vardır.

*Yeter Koşul :*

Eğer  $\mathcal{C}$  deki her düğüm çifti arasında yalnız bir yol varsa çizge bağlıdır ve çevresizdir. ■

**Teorem 3.2.2** Her bağlı çizgede en az bir ağaç vardır.

*Tanıt*

$\mathcal{C}$  nin bağlı olması, her düğüm çifti arasında en az bir yol bulunduğu anlamına gelir. Öyleyse,  $\mathcal{C}$  nin ağaç olmaması,  $\mathcal{C}$  nin içinde bir çevre bulunduğu anlamına gelir.  $\mathcal{C}$  deki çevrelerden herhangi birini düşünelim. Bu çevreye ilişkin ayrıtlardan birinin çizgeden çıkarılması bu çevreyi ortadan kaldıracak ancak, çizgenin bağlılığını ya da düğüm sayısını etkilemeyecektir. Bu işlemin yeterince yinelenmesi bir ağaç ile sonuçlanacaktır. ■

**Teorem 3.2.3**  $\mathcal{C}(d,a)$  çizgesindeki bir A ağacında, d düğüm ve d-1 ayrıt vardır.

*Tanıt*

Teoremi tümevarım ile tanıtlayacağız.

## 3.2 Ağaç ve ilişkin kavramlar

---

$$d = 2 \quad a = 1$$

için teorem doğrudur.

$$d = n \quad a = n-1$$

için de teoremin doğru olduğunu varsayalım. Ağacın bağlılığı ve çevresizliği koşulundan dolayı, ağaca her eklenen ayrıt,  $d$  ve  $a$  nın değerini bir arttıracaktır. Öyleyse teorem,

$$d = n+1$$

için de doğrudur. ■

Yukardaki tanım ve teoremlerden, ağacı ilişkin aşağıdaki özelliği verebiliriz.

- Özellik** 3.2.1  $(d,a)$  daki bir  $A$  ağacı aşağıdaki dört özelliği de sağlar :
- $A$  bağlıdır,
  - $A$  da çevre yoktur,
  - $A$  da  $d$  düğüm vardır,
  - $A$  de  $d-1$  ayrıt vardır.

Ağaca ilişkin bu dört özellikten her hangi üçünün, dördüncüsünü önereceği kolaylıkla görülebilir. Ancak bu özelliklerinde yalnız b) ve c) öbür ikisini de önermektedir.

**Teorem 3.2.4**  $\mathcal{C}(d,a)$  da,  $d$  düğümlü çevresiz bir altçizge ağaçtır.

*Tanıt*

Özellik 3.2.1 deki herhangi 3 özellik dördüncüsünü önereceğinden, teoremi tanıtlamak için yalnız.

b)  $A$  da çevre yoktur,

ç)  $A$  da  $d-1$  ayrıt vardır

özelliklerinin,

a)  $A$  bağlıdır

özelliğini önerdiğini göstermemiz yeterlidir.

$A$  nın,  $A_1, A_2, \dots, A_p$  diye göstereceğimiz  $p$  parçası olduğunu düşünelim.  $d_i$ ,  $A_i$  deki düğüm sayısı olsun. Parçalar kendi aralarında bağlı olduğu için, her parçada  $d_i-1$  ayrıt vardır ( $A_i$  nin kendisi ağaçtır). Öyleyse bunların birleşiminden oluşan  $A$  da,

$$\sum_{i=1}^p d_i = d$$

düğüm vardır. Ya da  $A$  daki ayrıt sayısı,

$$\sum_{i=1}^p (d_i-1) = \sum_{i=1}^p d_i - p = d - p$$

dir. Ancak  $A$  daki ayrıt sayısının  $d-1$  olduğunu

## 3.2 Ağaç ve ilişkin kavramlar

---

biliyoruz. Öyleyse,

$$d - 1 = d - p$$

eşitliğinden,

$$p = 1$$

ya da A'nın bağlı olduğu tanıtlanır. ■

**Tanım 3.2.2**  $\zeta(d,a)$  nın,  $A^T$  ile gösterilen, A ya göre tümler altçizgesine tümlerağaç denir.

**Tanım 3.2.3**  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p$  parçalarından oluşan  $\zeta(d,a)$  çizgesinde  $A_i, \zeta_i$  deki bir ağacı gösterebilir.

$$O = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p$$

olarak tanımlanan parçalı altçizgeye, orman denir.

**Tanım 3.2.4**  $\zeta(d,a)$  nın,  $O^T$  ile gösterilen, O ya göre tümler altçizgesine tümlerorman denir.

**Tanım 3.2.5** Ormandaki ayrıtlara dal, tümlerormandaki ayrıtlara kiriş denir.

**Tanım 3.2.6** A ağacına göre, çizgedeki her bir girişin yalnız dallardan ve

kendisinden oluşan birik ayrıt kümesi ile tanımladığı çevreye, t-çevre (temel çevre) denir.

Şekil 3.2.1 deki çizgede, kalın çizgilerle belirtilen ağaca göre  $\mathcal{C}_1$  bir t-çevredir.  $\mathcal{C}_2$  ise ağacın birden çok dalını içerdiği için bu ağacın bir t-çevresi değildir. Çizgede.  $\mathcal{C}_2$  yi t-çevre yapacak bir çok ağacın bulunduğu gözden kaçmamalıdır.

**Teorem 3.2.5**  $p$  parçadan oluşan  $\mathcal{C}(d, a)$  çizgesinde  $d-p$  dal,  $a-d+p$  giriş vardır.

**Tanım 3.2.7**  $\mathcal{C}(d, a)$  da,  $\delta$  ile gösterilen dal sayısına ( $\delta = d - p$ ) çizgenin aşaması,  $\kappa$  ile gösterilen giriş sayısına ( $\kappa = a - d + p$ ) çizgenin boşluğu denir.

Tanım 3.2.7 den, çizgede  $\kappa$  sayıda t-çevre olduğu görülür.

**Teorem 3.2.6**  $\mathcal{C}$  nin altçizesi  $\mathcal{C}_0$  ın,  $\mathcal{C}$  deki bir ağacın da altçizgesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul,  $\mathcal{C}_0$  da bir çevre olmamasıdır.



## 3.2 Ağaç ve ilişkin kavramlar

---

*Tanıt*

*Gerek Koşul :*

Gerek koşulun tanıtı, ağacın tanımından yapılabilir.  $\mathcal{C}_0$  da çevre olmadığı için,  $\mathcal{C}_0$  a yeterince ayrıt ekleyerek,  $\mathcal{C}$  içinde her zaman bir ağaç elde edebiliriz.

*Yeter Koşul :*

$\mathcal{C}_0$  da çevre olmadığını varsayalım.  $A$ ,  $\mathcal{C}$  deki bir ağaç olsun,

$$\mathcal{C}_1 = A \cup \mathcal{C}_0$$

altçizgesi,  $\mathcal{C}$  nin bütün düğümlerini ve bazı çevreleri içerecektir.  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}$  deki bir çevre olsun.  $\mathcal{C}_1$  de  $\mathcal{C}_0$  altçizgesine ilişkin olmayan en az bir  $a_j$  ayrıtı vardır.  $a_j$  ayrıtının  $\mathcal{C}_1$  den çıkarılması,  $\mathcal{C}_1$  çevresini ortadan kaldıracaktır. Bu işlemin bütün  $\mathcal{C}_j$  ler için yinelenmesi,  $\mathcal{C}$  içindeki bir ağaçla sonuçlanacaktır.

Altbölüm 3.1 de, kesitlemenin tanımını vermiştik. Kesitleme ile ağaç arasındaki birinci ilişki aşağıdaki gibi verilebilir.

**Teorem 3.2.7** ( $i=1, 2, \dots, a$ ) için  $K_i$  kesitlemesi, çizgedeki her ağaçtan en az bir dal içerir.

*Tanııt*

$$C_i = C - K_i$$

olsun.  $A_i$ , hiç bir dalı  $K_i$  içinde bulunmayan,  $C$  nin bir ağacını gösterebilirsin. Öyleyse,

$$A_i \subset C_i \subset C$$

ilişkinini yazabiliriz. Ancak, kesitlemenin tanımından  $C_i$  bağlı değildir. Demek ki  $A_i$  de bağlı değildir. Ama tanımdan ağaç bağlıdır. Bu çelişki ancak,

$$A_i \cap K_i \neq \emptyset$$

koşulu ile kalkabilir. ■

**Teorem 3.2.8**  $K$  nin kesitleme olabilmesi için gerek ve yeter koşul,  $K$  nin çizgedeki her ağaca ilişkin en az bir dalı içeren en az sayıda ayrıttan oluşan bir küme olmasıdır.

*Tanııt*

*Yeter Koşul:*

$K$ , her ağacın en az bir dalını içeren ve en az sayıda ayrıttan oluşan bir kümeyi gösterebilirsin.  $K$  ye göre tümler altçizge  $K^T$  içinde herhangi bir ağaç

### 3.2 Ağaç ve ilişkin kavramlar

---

yoktur. Başka bir deyişle,  $\kappa^T$  parçalıdır. Demek ki,  $\kappa^T$  nin aşaması  $\zeta$  ye göre bir eksiktir.  $\kappa$  bu koşulu sağlayan en az sayıda ayrıttan oluştuğu için bu kümeden herhangi bir ayrıtın  $\kappa^T$  ye eklenmesi,

$$\kappa_1 = \kappa^T \mathbf{U} a_0$$

çizgesini bağlı yapacaktır. Bu da  $\kappa$  nin bir kesitleme olduğu anlamına gelir.

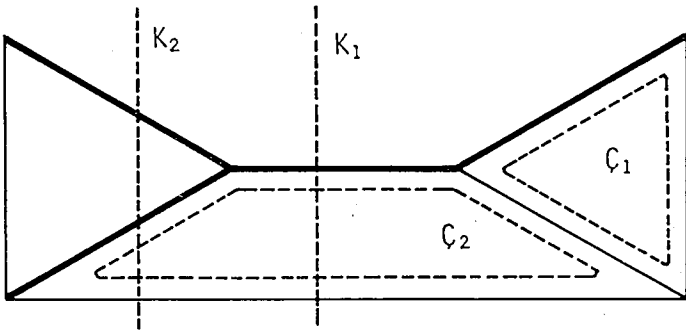
*Gerek Koşul :*

$\kappa$  bir kesitleme olsun. Öyleyse  $\kappa^T$  parçalı bir altçizgedir. Teorem 3.2.7 den,  $\kappa$  nin içinde her ağaçtan bir dal vardır. Eğer  $\kappa$  bu koşulu sağlayan en az sayıdaki ayrıtın oluşturduğu bir küme değilse  $\kappa$  nin bir uygun altkümesi kesitlemedir. Ancak böylesine bir durum yeter koşulun tanıtında çelişki yaratacaktır. Demek ki,  $\kappa$  en az sayıda ayrıttan oluşan bir kümedir. ■

**Tanım 3.2.8**  $A$  ağacına göre, çizgedeki her bir dalın, yalnız girişlerinden ve kendisinden oluşan ayrıtlarla tanımladığı kesitlemeye  $t$ -kesitleme (temel kesitleme) denir.

Şekil 3.2.1 deki çizgede, kalın çizgilerle belirtilen ağaca göre  $\kappa_1$  bir  $t$ -kesitlemedir.  $\kappa_2$  ise ağacın

birden çok dalını içerdiği için bu ağacın bir t-kesitlemesi değildir. Çizgede,  $K_2$  yi t-kesitleme yapacak bir çok ağacın bulunduğu gözden kaçmamalıdır.



Şekil 3.2.1 Ağaç ve t-çevre ve t-kesitleme kavramlarının açıklanması.

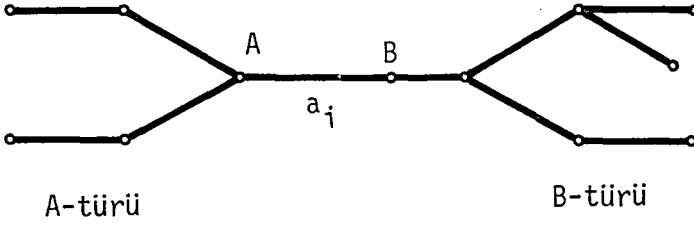
**Teorem 3.2.9**  $A, Ç$  deki bir ağaç ve  $a_i$  bu ağacın dalı olsun.  $a_i$  nin tanımlayacağı t-kesitlemede,  $a_i$  ile çevre yapan kirişler ve yalnız bu kirişler vardır.

*Tanıt*

$a_i$  ayrıtının uç düğümlerini  $A$  ve  $B$  olarak simgeleyelim. Öyleyse  $A$  daki düğümler, Şekil 3.2.2 de açıklandığı gibi  $A$  türü ve  $B$  türü diye iki kümeye ayrılabilir. Çizgedeki ayrıtlar da, yalnız

## 3.2 Ağaç ve ilişkin kavramlar

A türü ( $a_A$ ), yalnız B türü ( $a_B$ ) ve yalnız A ve B türü ( $a_{AB}$ ) düğümlere çakışık olanlar diye üç

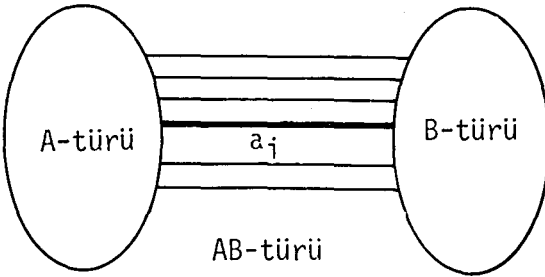


Şekil 3.2.2 Çizgedeki düğümlerin A ve B türü olarak iki kümeye ayrılması

kümeye ayrılabilir (Şekil 3.2.3).  $a_i$  nin tanımladığı t-kesitleme  $K_i$ ,

$$K_i = a_i \cup a_{AB}$$

dir. Ayrıca,



Şekil 3.2.3 Çizgedeki düğümlerin A, B AB türü olarak üç kümeye ayrılması

$$a_A \cap a_B = \phi$$

özelliğini de biliyoruz.  $a_j$ ,  $a_{AB}$  kümesindeki ayrıtlardan biri olsun.  $a_j$ 'nin tanımladığı  $t$ -çevrede  $a_j$  bulunmak zorundadır. ■

**Teorem 3.2.10** Herhangi bir kesitleme, çizgede tanımlanan bütün çevrelerden çiftler sayıda alınan ayrıtlardan oluşur.

*Tanıt*

$a_j$  ayrıtının tanımladığı  $t$ -kesitleme  $K_j$  olsun. Çizgedeki herhangi bir çevreyi  $C_j$  ile gösterelim.

$$K_j \cap C_j = C_0$$

olarak tanımlanan  $C_0$  çizgesi eğer boş çizge ise,  $K_j$  de  $C_j$  ye ortak ayrıtların sayısı sıfırdır (çiftsayı).

$C_0$  ın boş çizge olmadığını varsayalım. Bu durumda, Şekil 3.2.3 deki gösterimden yararlanarak,  $C_0$  daki ayrıt sayısının çiftsayı olması gerektiği görülecektir. ■

Bu teoremin benzerini, tanıtlamadan aşağıdaki gibi vereceğiz.

**Teorem 3.2.11** Her hangi bir çevre ile ortak

## 3.2 Ağaç ve ilişkin kavramlar

---

ayrıtlarının sayısı, çiftsayı olan ayrıtlar kümesi ya bir kesitleme ya da ortak ayrıtısız kesitlemeler kümesidir.

### 3.3 t-ÇEVRE VE t-KESİTLEME MATRİSLERİ

Altbölüm 2.1 de çakışım matrisinin tanımını vermiştik.  $P$ , bağılı bir çizgenin çakışım matrisini gösterebilir. Her dizekte sıfır olmayan yalnız iki terim bulunduğu için, ilk  $d-1$  dizek  $\bar{P}$  nin  $d$  ninci dizeline toplanır (başkaca belirtilmedikçe, bu altbölümdeki toplamalar iki tabanına göredir:  $1 + 1 = 0$ ,  $1 + 0 = 1$ ), hep sıfırlardan oluşan bir dizek elde edilecektir. Demek ki  $\bar{P}$  nin aşaması en çok  $d - 1$  dir.

Dizelerin yeniden düzenlenmesi ile  $\bar{P}$ ,

$$\bar{P} = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & \text{-----} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ \cdot & \bar{P}_1 \\ 0 & \\ 1 & \end{array} \right]$$

biçiminde yazılabilir. Birinci dizek,  $d$  ninci dizekle toplanır,

$$\bar{\bar{P}} = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & \text{-----} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \bar{\bar{P}}_1 \\ 0 & \end{array} \right]$$



### 3.3 t-Çevre ve t-Kesitleme matrisleri

elde edilir. Dizelerin yeniden düzenlenmesi ve iki dizeğin toplanması işlemi  $\bar{P}_1$  ve daha sonra çıkacak  $\bar{P}_1$  altmatrisleri üzerinde yinelenirse,

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Demek ki bağlı çizgelere ilişkin çakışım matrisinin aşaması d-1 dir. Öyleyse bu gözlemin bir genellemesi olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

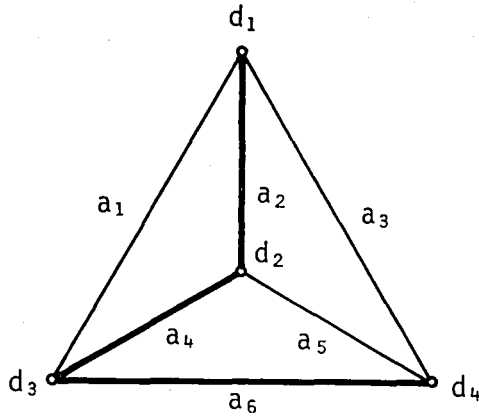
**Teorem 3.3.1** p parçadan oluşan  $\zeta(d,a)$  çizgesine ilişkin çakışım matrisinin aşaması d-p dir.

n çevresi olan bir çizgedeki i ninci çevreyi  $\zeta_i$  ile gösterelim.

**Tanım 3.3.1**  $\zeta(d,a)$  nın,  $n \times a$  boyutundaki çevre matrisi  $\bar{B} = [b_{ij}]$  j ninci ayrıt, i ninci çevrede ise (değilse)  $b_{ij} = 1$  ( $b_{ij} = 0$ ) olarak tanımlanır.

Şekil 3.3.1 deki  $\zeta(4,6)$  çizgesine ilişkin çevre matrisini,

$$\bar{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{array}{l} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ \zeta_5 \\ \zeta_6 \\ \zeta_7 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$



Şekil 3.3.1  $\zeta(4,6)$  çizgesi.

ve çakışım matrisini,

$$\bar{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{array}{l} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

### 3.3 t-Çevre ve t-Kesitleme matrisleri

---

olarak yazabiliriz.  $\bar{B}'$  ve  $\bar{P}'$  sırasıyla,  $\bar{B}$  ve  $\bar{P}$  matrislerinin evriklerini gösterirse, bu örnek için

$$\bar{P} \bar{B}' = 0 \quad \text{ya da} \quad \bar{B} \bar{P}' = 0$$

olduğu hemen görülecektir. Bu özelliğin bütün çizgeler için de doğru olduğunu göstermek için,  $\bar{P}$  nin  $i$  ninci dizeği  $p_i$  ve  $\bar{B}$  nin  $j$  ninci dizeği  $b_j$  yi düşünelim. Eğer  $d_i$  düğümü,  $\mathcal{C}_j$  çevresinde ise  $p_i$  de ve  $b_j$  de ortak olan yalnız iki tane bire eşit terim vardır ve bu dizeler iki tabanına göre çarpıldıklarında sıfır vereceklerdir. Eğer  $d_i$  düğümü  $\mathcal{C}_j$  çevresinde değilse,  $p_i$  ve  $b_j$  de bire eşit ortak terim yoktur ve bu dizelerin çarpımı yine sıfır verecektir.

Tanım 3.2.6 dan  $t$ -çevrelerin bağımsız olduğu görülmektedir. Öyleyse, çevre matrisinin, belli bir ağaca göre tanımlanan  $t$ -çevrelerden oluşan altmatrisi her zaman,

$$B_t = \begin{bmatrix} B_1 & I \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir.  $B_t$  ye  $t$ -çevre matrisi diyeceğiz.  $B_1$  ve  $I$  nın dikeçleri sırasıyla, dallara ve kırıslara karşılık düşmektedir. Örneğin, Şekil 3.3.1 de kalın çizgilerle belirtilen ağaca ilişkin  $t$ -çevre matrisi,

### 3. BÖLÜM

---

$$B_t = \begin{array}{c} \zeta_1 \\ \zeta_5 \\ \zeta_3 \end{array} \begin{array}{cccccc} a_2 & a_4 & a_6 & a_1 & a_3 & a_5 \\ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

dir. Bu gözlemin sonucu, genel bir çizge için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.3.2**  $p$  parçadan oluşan  $\zeta(d,a)$  çizgesine ilişkin çevre matrisinin aşaması  $a-d+p$  dir.

Çevre matrisine benzer olarak kesitleme matrisini de aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.  $n$  kesitlemesi olan bir çizgedeki  $i$  ninci kesitlemeyi  $K_i$  ile gösterelim.

**Tanım 3.3.2**  $\zeta(d,a)$  nın,  $n \times a$  boyutundaki kesitleme matrisi  $\bar{Q} = [q_{ij}]$ :  
 $j$  ninci ayırıt,  $i$  ninci kitlemede  
ise (değilse)  $q_{ij} = 1$  ( $q_{ij} = 0$ )  
olarak tanımlanır.

Şekil 3.3.1 deki  $\zeta(4,6)$  çizgesine ilişkin kesitleme matrisi,

### 3.3 t-Çevre ve t-Kesitleme matrisleri

$$\bar{Q} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

t-çevre matrisinde olduğu gibi, bir ağaca göre tanımlanacak *t-kesitleme matrisini* her zaman,

$$Q_t = \begin{bmatrix} I & Q_1 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazabiliriz. Burada  $I$  ve  $Q_1$  in dikeçleri sırasıyla, dallara ve kirislere karşüdmektedir. Örneğin, Şekil 3.3.1 de kalın çizgilerle belirtilen ağaca ilişkin *t-kesitleme matrisi*,

$$Q_t = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccc} a_2 & a_4 & a_6 & a_1 & a_3 & a_5 \\ \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Bu gözlemin bir genellemesi olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.3.3**  $p$  parçadan oluşan  $\zeta(d,a)$  çizgesine ilişkin kesitleme matrisinin aşaması

d-p dir.

Çevre ve kesitlemelerin  $\oplus$  altında Abel toplulukları oluşturduğunu görmüştük. Yukardaki incelememizden ve ortaya koyduğumuz aşama özelliklerinden, t-çevre ve t-kesitlemelerin, sözü edilen Abel topluluklarına ilişkin *üreteçler* olduğu gözden kaçmamalıdır. Yukarda izlediğimize benzer bir düşünce ile,

$$\bar{Q} \bar{B}' = 0 \quad \text{ya da} \quad \bar{B} \bar{Q}' = 0$$

olduğunu da gösterebiliriz. Bu gözlem bize, t-kesitleme ve indirgenmiş çakışım matrisi arasında,

$$Q_t = T P$$

gibi bir dönüşümün varlığını söyleyecektir. Çakışım matrisinin de dikeçlerini, dallar ve kirişler olarak iki kümede toplarsak,

$$\begin{bmatrix} I & Q_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix}$$

ya da

$$T = P_1^{-1}$$

sonucunu elde ederiz. Ayrıca,

$$Q_t B_t' = B_t Q_t' = 0$$

eşitliğinde de,

$$\begin{bmatrix} I & Q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1' \\ I \end{bmatrix} = 0$$

$$B_1' + Q_1 = 0$$

ya da

$$Q_1 = B_1'$$

olduğunu görürüz (işlemlerimizin 2 tabanına göre olduğunu unutmayalım). Demek ki t-kesitleme ya da t-çevre matrillerinden birini bilmemiz, öbürünü de bilmemiz anlamına gelecektir.

Çizge matrislerinin aşamalarına ilişkin bu özelliklerden yararlanarak aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

**Teorem 3.3.4** Bağlı bir  $\mathcal{C}(d,a)$  ya ilişkin  $Q_t$  ya da  $P$  matrisinin  $d-1$  boyutundaki bir dördül altmatrisinin tekil olmaması için gerek ve yeter koşul, bu altmatrise ilişkin dikeçlerin çizgede bir ağaç oluşturmasıdır.

**Teorem 3.3.5** Bağlı bir  $\mathcal{C}(d,a)$  ya ilişkin  $B_t$  matrisinin,  $a-d+1$  boyutundaki bir dördül altmatrisinin tekil

### 3. BÖLÜM

---

olmaması için gerek ve yeter koşul, bu altmatrise ilişkin dikeçlerin çizgede bir tümlerağaç oluşturmasıdır.

Ayrıca,  $B_t$ ,  $Q_t$  ya da  $P$  matrisinin tekil olmayan herhangi dördül bir altmatrisine ilişkin belirtenin 10 tabanına göre yapılan işlemler sonucu, değer  $\pm 1$  olacağı da gösterilebilir (bu özellikteki matrislere *birimsel matris* denir). Birimsel olma özelliğinden ve Binet-Cauchy teoreminden yararlanarak, çizgedeki ağaç ya da tümlerağaç sayısı  $\mu$  nun,

$$\mu = |Q_t \quad Q_t'|$$

$$\mu = |B_t \quad B_t'|$$

$$\mu = |P \quad P'|$$

olacağını gösterebiliriz. Örneğin, Şekil 3.3.1'deki çizgede, Şekil 3.3.2'de gösterildiği gibi,

$$\begin{aligned} |Q_t \quad Q_t'| &= \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 16 \end{aligned}$$



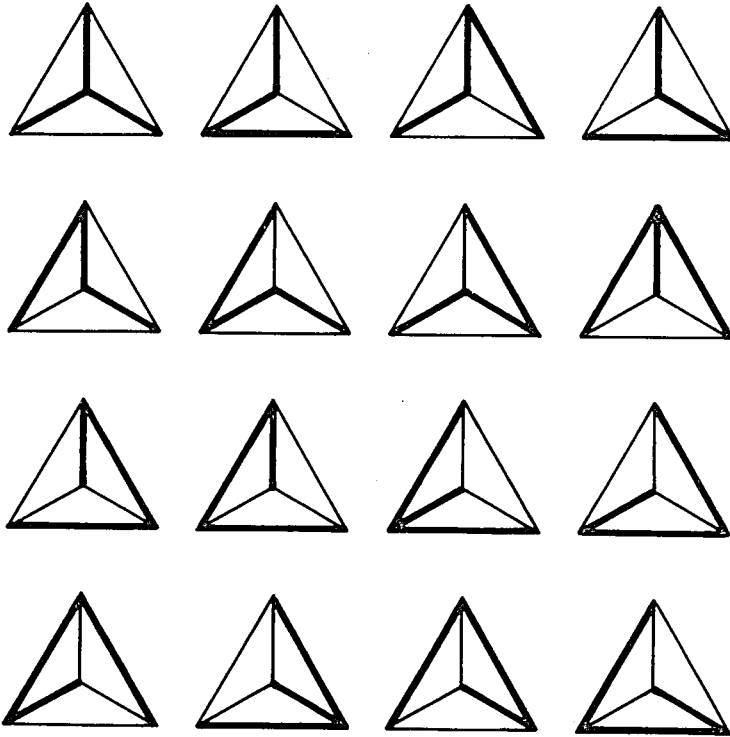
### 3.3 t-Çevre ve t-Kesitleme matrisleri

---

değişik ağaç vardır (bu son işlemin 10 tabanına göre yapıldığı gözden kaçmamalıdır).

$$\begin{aligned} R &= Q_t Q_t' & S &= B_t B_t' \\ \tilde{R} &= Q_t' Q_t & \tilde{S} &= B_t' B_t \end{aligned}$$

olarak tanımlanan matrislerin taşıdığı anlamın açıklanmasını düşünmek için okuyucuya bırakıyoruz.

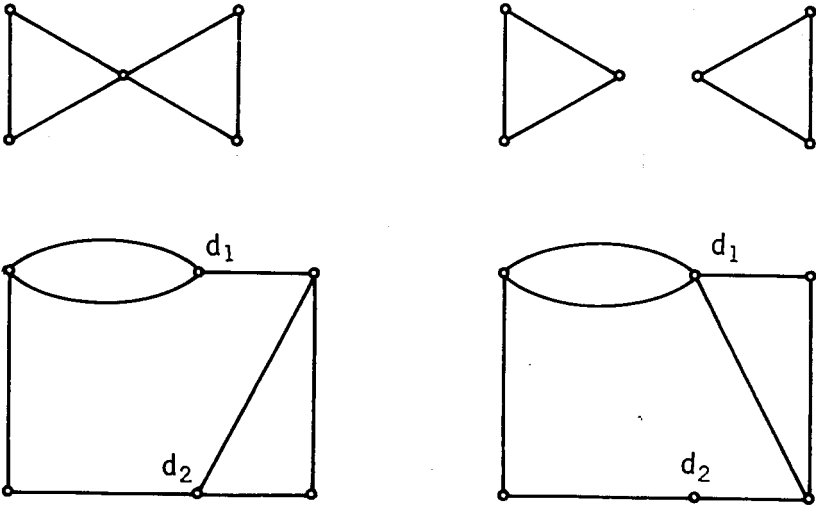


Şekil 3.3.2  $\mathcal{C}(4,6)$  daki 16 ağaç.

Çevre, kesitleme, t-çevre ve t-kesitleme kavramlarını böylece açıkladıktan sonra, bunlara yakın ilişkisi olan ikinci düzeyden eşyapılılığı tanımlayabiliriz.

**Tanım 3.3.3** Bir çizgeyi öbeklerine parçalamaya ya da çizgeye yalnız iki düğüm ile bağlı olan bir altçizmeyi ters yüz etmeye eşyapılılık işlemleri denir.

Şekil 3.3.3 de Tanım 3.3.3 de açıklanan işlemlere örnekler verilmiştir.



Şekil 3.3.3 Eşyapılılık işlemleri

- Öbeklere ayırma
- Altçizgenin  $d_1$ ,  $d_2$  düğümlerinde ters yüz edilmesi.

**Tanım 3.3.4**  $\mathcal{C}_1$  ile bu çizge üzerinde eşyapılılık işlemlerinin dilendiği kadar uygulanması sonucu elde edilen  $\mathcal{C}_2$  çizgesi ikinci düzeyden eşyapılıdır.

İkinci düzeyden eşyapılı çizgelerde ayrıtlar, düğümler, çevreler ve kesitlemeler arasında 1 : 1 bir karşılıkma olduğu gözden kaçmamalıdır. Bu gözlem sonucu aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.3.6** İkinci düzeyden eşyapılı çizgelerin çevre ve kesitleme matrisleri özdeştir.

### 3.4 t-KESİTLEME MATRİSİNİN GERÇEKLEŞTİRİMİ

Verilen çakışım matrisine ilişkin çizgenin bulunmasında bir sorun olmadığını biliyoruz. Ancak, gerçekleştirime ilişkin böylesine bir açıklık t-kesitleme ya da t-çevre matrisi için söz konusu değildir. Dolayısıyla, bu tür matrislerin gerçekleştirimi için düzenli bir yöntem geliştirmek zorundayız. t-çevre ve t-kesitleme matrislerinin arasındaki ilişkiden dolayı yalnız t-kesitleme matrisinin gerçekleştirimi sorunu üzerinde duracağız.

**Tanım 3.4.1** Verilen bir t-kesitleme matrisinde: i ninci dizekte sıfır olmayan terimlerine ilişkin dikeçlerin atılması ve bu işlemden sonra geriye kalan i ninci dizeğin tümüyle atılması ile elde edilen altmatrise H-matrisi denir.

H-matrisini, atılan dizeği de belirterek,  $H(i)$  biçiminde göstereceğiz. Örneğin, Şekil 3.4.1 deki çizgenin t-kesitleme matrisi,

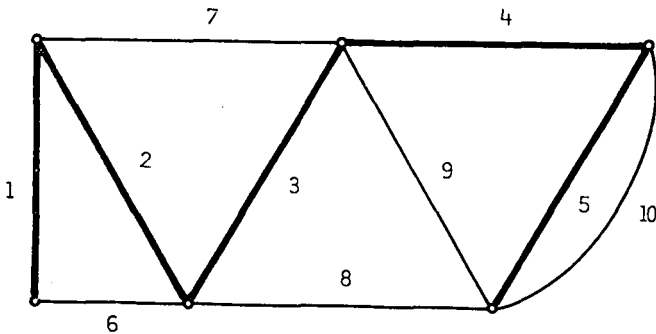
### 3.4 t-Kesitleme matrisinin gerçekleştirimi

$$Q_t = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

biçiminde yazılabilir. Bu matrise ilişkin  $H(3)$  matrisi,

$$H(3) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dır. Tanım 3.4.1 de açıklanan işlem, çizgeyi



şekil 3.4.1  $H$ -matrisinin açıklanmasına rnek.

### 3. BÖLÜM

$i$  temel kesitlemesine göre iki ayrı parçaya parçalamakla eşanlamlıdır. Öyleyse, dizek ve dikeçlerin yeniden düzenlenmesi  $H(i)$  matrisini her zaman,

$$H(i) = \left[ \begin{array}{c|c} H(i)_1 & 0 \\ \hline 0 & H(i)_2 \end{array} \right]$$

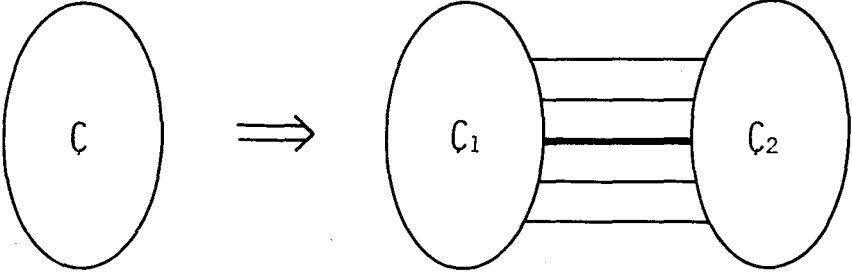
biçimine getirecektir. Örneğin,  $H(3)$  matrisi,

$$H(3) = \begin{array}{c} \phantom{1} \phantom{2} \phantom{6} \phantom{4} \phantom{5} \phantom{9} \phantom{10} \\ 1 \phantom{2} \phantom{6} \phantom{4} \phantom{5} \phantom{9} \phantom{10} \\ 2 \phantom{6} \phantom{4} \phantom{5} \phantom{9} \phantom{10} \\ 4 \phantom{5} \phantom{9} \phantom{10} \\ 5 \phantom{9} \phantom{10} \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

biçiminde de yazılabilir. Bu işlemi daha genel anlamıyla açıklamak için  $\zeta$  çizgesini,  $i$  kesitlemesini de belirterek, Şekil 3.4.2 de gösterildiği gibi yeniden çizelim.  $H(i)_1(H(i)_2)$  matrisi,  $i$  kesitlemesi çizgeden çıkarıldıktan sonra geriye kalan  $\zeta_1(\zeta_2)$  çizgesinin  $t$ -kesitleme matrisidir. Ancak,  $\zeta_1$  ya da  $\zeta_2$  altçizgesinde herhangi bir dal yoksa,  $H(i)_1$  ya da  $H(i)_2$  altmatrisi de var olmayacaktır ( $H(i)_1 = \phi$  ya da  $H(i)_2 = \phi$ ), Şekil 3.4.1 deki çizgeye ilişkin  $H(1)$  ya da  $H(5)$  matrisi için

### 3.4 t-Kesitleme matrisinin gerekleştirmi

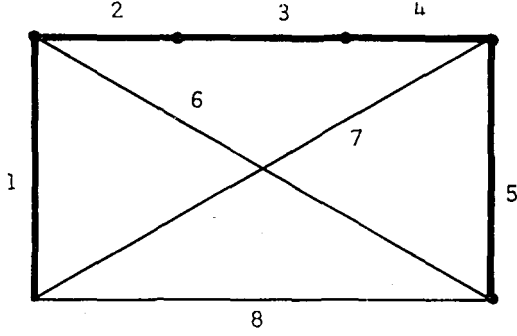
---



şekil 3.4.2 H-matrisinin açıklanması.

böylesine bir durum görülecektir. Yalnız  $H(i)$  matrisinin iki altmatrise parçalanmasının her zaman için birik olmadığı gözden kaçmamalıdır. şekil 3.4.3 deki çizgenin t-kesitleme matrisi,

$$Q_t = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



Şekil 3.4.3  $\mathbb{H}$ -matrisinin parçalanmasının birik olmadığını gösteren bir örnek.

olarak yazılabilir. Bu matrise ilişkin  $\mathbb{H}(3)$  ise,

$$\mathbb{H}(3) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dir. Bu durumda  $\mathbb{H}(3)_1$  in doğru seçimi,

$$\mathbb{H}(3)_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dir. Ancak,



### 3.4 t-Kesitleme matrisinin gerçeleştirimi

---

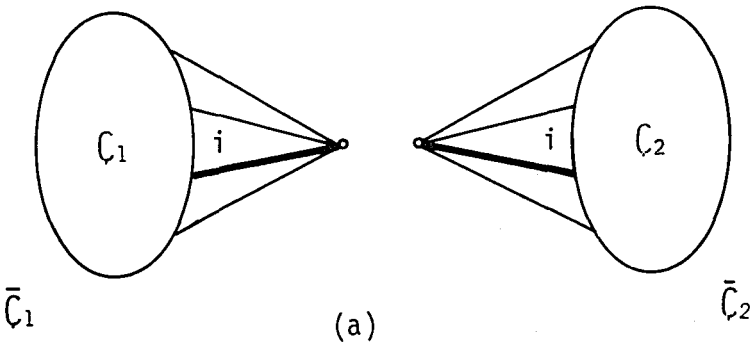
$$H(3)_1 = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

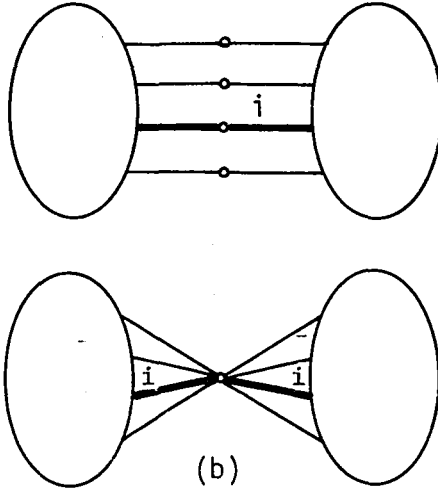
ya da

$$H(3)_1 = \begin{matrix} & 1 & 2 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

de seçilebilirdi. Konuda daha çok ilerlemeden, doğru seçimin nasıl yapılacağını değin herhangi birşey söyleyemeyiz.

$\bar{C}_2$  ya da  $\bar{C}_1$  altçizgesindeki bütün düğümlerin büzüştürölüp, oluşabilecek tekçevrelerin de çizgeden atıldığını düşünürsek, elimizde Şekil 3.4.4a da gösterilen çizgelerden biri kalacaktır.



Şekil 3.4.4  $M$ -matrisinin açıklanması.

Bu çizgeleri, Şekil 3.4.4b de açıklandığı gibi,  $i$  kesitlemesindeki ayrıtları büzleştirüp, çizgeyi ikiye ayırarak da elde edebiliriz.  $\mathcal{C}_1$  ya da  $\mathcal{C}_2$  çizgesinin  $t$ -kesitleme matrisinin,  $\Omega_t$  matrisinden de elde edilebileceğini, aşağıdaki tanıımı verdikten sonra kolayca görebiliriz.

**Tanım 3.4.2**  $M(i)_1 = \Omega_t \ominus H(i)_2$

ve

$$M(i)_2 = \Omega_t \ominus H(i)_1$$

olarak gösterilen ve  $M$ -matrisi diye adlandıracağımız matrisler,  $\Omega_t$  matrisinden sırasıyla,  $H(i)_2$  ve  $H(i)_1$  matrisine ilişkin bütün dizek ve dikeçlerin atılması ile

### 3.4 t-Kesitleme matrisinin gerçekleştirimi

---

elde edilir.

Burada  $\ominus$  , Tanım 3.4.2 de açıklandığı gibi özel bir matris çıkışma işlemini göstermektedir. Tanım 3.4.2 den,  $M(i)_1$  ve  $M(i)_2$  nin sırasıyla,  $\bar{C}_1$  ve  $\bar{C}_2$  çizgelerinin t-kesitleme matrisleri olduğu hemen görülecektir. Ayrıca,  $M(i)$  matrisindeki  $i$  kesitlemesi, bir *çakışım kümesi* dir de.

$M(i)_1$  matrisi,  $\zeta$  ye ilişkin bir altçizgenin t-kesitleme matrisi olduğuna göre, bu kez  $H(j)$  ( $j \neq i$ ) matrisi ve bu matrise ilişkin  $M(ij)_1$  ve  $M(ij)_2$  matrislerini elde edebiliriz. Bu matrislerin temel özelliği, her birinde  $i$  ve  $j$  kesitlemelerinin birer çakışım kümesi olmasıdır. Bu işlemi yeterince yinelersek, bütün dizekleri birer çakışım kümesi olan *temel M-matrislerini* buluruz. Her bir temel M-matrisi çakışım matrisi olduğu için, ilişkin altçizgelerin bulunması bir sorun değildir. Bu altçizgelere Şekil 3.4.4b de açıklanan işlemin tersinin uygulanması,  $Q_t$  matrisine ilişkin aranan çizgeyi verecektir. Eğer elde edilen temel M-matrislerinden herhangi biri çakışım matrisinin özelliklerini sağlamıyorsa, ilişkin t-kesitleme matrisi de gerçekleşemez demektir. Ancak, burada bir saplama yapmamız uygun olur.  $H(i)$  matrisinin parçalanması doğru yapılmamışsa yanlış M-matrislerinin elde edilmesi doğaldır. Demek ki,  $H(i)$  matrisinin bütün değişik

### 3. BÖLÜM

---

parçalanmalarını denemek zorunda da kalabiliriz.  
Bu yöntemi bir örnek üzerinde açıklayalım.

$$Q_t = \begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

t-kesitleme matrisi olarak gerçekleştirilmesi istenen matris olsun. Bu aşamada  $Q_t$  nin bir t-kesitleme matrisi olup olmadığını henüz bilmediğimiz unutulmamalıdır. Başlangıç olarak 1 ile gösterilen kesitlemeyi ele alalım.

$$H(1) = \begin{array}{c} 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 9 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$H(1)$  matrisinin,

### 3.4 t-Kesitleme matrisinin gerçekleştirimi

$$H(1)_1 = \begin{matrix} & & 2 & 4 \\ 2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 4 & \end{matrix} \quad H(1)_2 = \begin{matrix} & & 3 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 5 & \\ 6 & \end{matrix}$$

olarak parçalandığını düşünelim.

$$M(1)_1 = Q_t \ominus H(1)_2$$

$$= \begin{matrix} & & 1 & 2 & 4 & 8 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2 & \\ 4 & \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{çakışım} \\ \text{kümesi} \end{matrix}$$

$$M(1)_2 = Q_t \ominus H(1)_1$$

$$= \begin{matrix} & & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 3 & \\ 5 & \\ 6 & \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{çakışım} \\ \text{kümesi} \end{matrix}$$

$M(1)_1$  i ele alalım. 1 dizeği çakışım kümesi olduğu için, işlemlerimizi 2 dizeği üzerinde sürdüreceğiz.

$$H(2) = \begin{array}{c} \phantom{1} \quad \phantom{4} \quad \phantom{8} \quad \phantom{11} \\ \phantom{1} \quad \phantom{4} \quad \phantom{8} \quad \phantom{11} \\ 1 \quad \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ 4 \end{array}$$

H(2) matrisinin parçalanması yalnız,

$$H(2)_1 = H(2) \quad \text{ve} \quad H(2)_2 = \phi$$

biçiminde olabilir.

$$M(12)_1 = M(1)_1 \ominus H(2)_2$$

$$\begin{array}{c} \phantom{1} \quad \phantom{2} \quad \phantom{4} \quad \phantom{8} \quad \phantom{10} \quad \phantom{11} \quad \phantom{12} \\ \phantom{1} \quad \phantom{2} \quad \phantom{4} \quad \phantom{8} \quad \phantom{10} \quad \phantom{11} \quad \phantom{12} \\ 1 \quad \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{çakışım} \\ \leftarrow \text{kümüleri} \end{array} \\ = 2 \\ 4 \end{array}$$

$$M(12)_2 = M(1)_1 - H(2)_1$$

$$= 2 \quad \begin{array}{c} \phantom{1} \quad \phantom{10} \quad \phantom{12} \\ \phantom{1} \quad \phantom{10} \quad \phantom{12} \\ \phantom{1} \quad \phantom{10} \quad \phantom{12} \\ 2 \quad \left[ \begin{array}{ccc} 2 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad \text{temel } M\text{-matrisi} \end{array}$$

M(12)<sub>1</sub> matrisinin 4 ile gösterilen dizeği işlenmediği için, bu kez işlemlerimizi 4 kesitlemesine uygulayalım.

### 3.4 t-Kesitleme matrisinin gerçekleştirimi

---

$$H(4) = \begin{matrix} & & 1 & 2 & 11 \\ 1 & & \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ 2 & & & & \end{matrix}$$

$H(4)$  matrisinin parçalanması,

$$H(4)_1 = \begin{matrix} & 1 & 11 \\ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} \right] \end{matrix} \quad \text{ve} \quad H(4)_2 = \begin{matrix} & 2 \\ \left[ \begin{array}{c} 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

biçiminde olacaktır.

$$M(124)_1 = M(12)_1 \ominus H(4)_2$$

$$= \begin{matrix} & & 1 & 4 & 8 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & & \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ 4 & & & & & & & \end{matrix} \begin{matrix} \text{temel} \\ M\text{-matrisi} \end{matrix}$$

$M(1)_1$  matrisine ilişkin işlenecek başka dizek kalmadığı için  $M(1)_2$  matrisini ele alalım.

$$H(3) = \begin{matrix} & & 1 & 5 & 6 & 8 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & & \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ 5 & & & & & & & & \\ 6 & & & & & & & & \end{matrix}$$

$H(3)$  matrisinin paçalanması yalnız

$$H(3)_1 = H(3) \quad \text{ve} \quad H(3)_2 = \phi$$

### 3. BÖLÜM

biçiminde olabilir.

$$M(13)_1 = M(1)_2 \ominus H(3)_2$$

$$= \begin{matrix} & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \text{çakışım kümeleri}$$

$$M(13)_2 = M(1)_2 \ominus H(3)_1$$

$$= 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{temel M-matrisi}$$

M(13)<sub>1</sub> matrisinin 5 ve 6 ile gösterilen dizekleri işlenmediği için önce 5 dizeğini ele alalım.

$$H(5) = \begin{matrix} & 1 & 3 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

H(5) matrisinin parçalanması,

$$H(5)_1 = 1 \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad H(5)_2 = \begin{matrix} & 3 & 6 \\ \begin{matrix} 3 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



### 3.4 t-Kesitleme matrisinin gerekleştirmi

biçiminde olsun.

$$M(135)_1 = M(13)_1 \ominus H(5)_2$$

$$= \begin{array}{cccccccc} & 1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & \left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ 5 & & & & & & & & \end{array} \begin{array}{l} \text{temel} \\ M\text{-matrisi} \end{array}$$

$$M(135)_2 = M(13)_1 \ominus H(5)_1$$

$$= \begin{array}{cccccccc} & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & \left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ 5 & & & & & & & & & \\ 6 & & & & & & & & & \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \\ \text{akışım kemeleri} \end{array}$$

Bu kez işlemlerimizi  $M(135)_2$  matrisinin 6 ile gösterilen dizeği üzerinde yineleyelim.

$$H(6) = \begin{array}{cccc} & 3 & 5 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ 5 & & & & & & \end{array}$$

$H(6)$  matrisinin parçalanması yalnız,

$$H(6)_1 = H(6) \quad \text{ve} \quad H(6)_2 = \phi$$

biçiminde olabilir.

### 3. BÖLÜM

---

$$M(1356)_1 = M(135)_2 \ominus H(6)_2$$

$$= \begin{matrix} & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

temel  
M-matrisi

Ancak, 7 ile gösterilen dikeçte 2 den çok sıfır olmayan terim bulunduğu için  $M(1356)$  çakışım matrisi olamaz. Öyleyse,  $H(5)$  matrisinin başka bir parçalanmasını düşüneceğiz.

$$H(5) = \begin{matrix} & 1 & 3 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

matrisi,

$$H(5)_1 = \begin{matrix} & 1 & 3 \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad H(5)_2 = \begin{matrix} & 6 \\ 6 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

biçiminde parçalansın. Bu kez yeni M-matrisleri

### 3.4 t-Kesitleme matrisinin gerçekleştirimi

---

aşağıdaki gibi olacaktır.

$$M(135)_1 = M(13)_1 \ominus H(5)_2$$

$$= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

temel  
M-matrisi

$$M(135)_2 = M(13)_1 \ominus H(5)_1$$

$$= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M(135)_2$  matrisindeki 6 dizeği işlenmemiş olduğu için:

$$H(6) = 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H(6)_1 = H(6) \quad \text{ve} \quad H(6)_2 = \phi$$

buluruz. Buradan da,

$$M(1356)_1 = M(135)_2 \ominus H(6)_2$$

$$= \begin{matrix} & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right. \\ 6 & \left. \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

temel  
M-matrisi

ve

$$M(1356)_2 = M(135)_2 \ominus H(6)_1$$

$$= 6 \begin{matrix} 6 & 7 & 12 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{matrix} \text{ temel M-matrisi}$$

elde edilir. Çakışım matrisi olan temel M-matrisleri,

$$M_1 = M(12)_2$$

$$= 2 \begin{matrix} 2 & 10 & 12 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$M_2 = M(124)_1$$

$$= \begin{matrix} & 1 & 4 & 8 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right. \\ 4 & \left. \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

### 3.4 t-Kesitleme matrisinin gerçekleştirimi

---

$$M_3 = M(124)_2$$

$$= \begin{matrix} & 2 & 4 & 8 & 10 & 12 \\ 2 & [ & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & ] \\ 4 & [ & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & ] \end{matrix}$$

$$M_4 = M(13)_2$$

$$= \begin{matrix} & 3 & 7 & 9 \\ 3 & [ & 1 & 1 & 1 & ] \end{matrix}$$

$$M_5 = M(135)_1$$

$$= \begin{matrix} & 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & [ & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & ] \\ 3 & [ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ] \\ 5 & [ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & ] \end{matrix}$$

$$M_6 = M(1356)_1$$

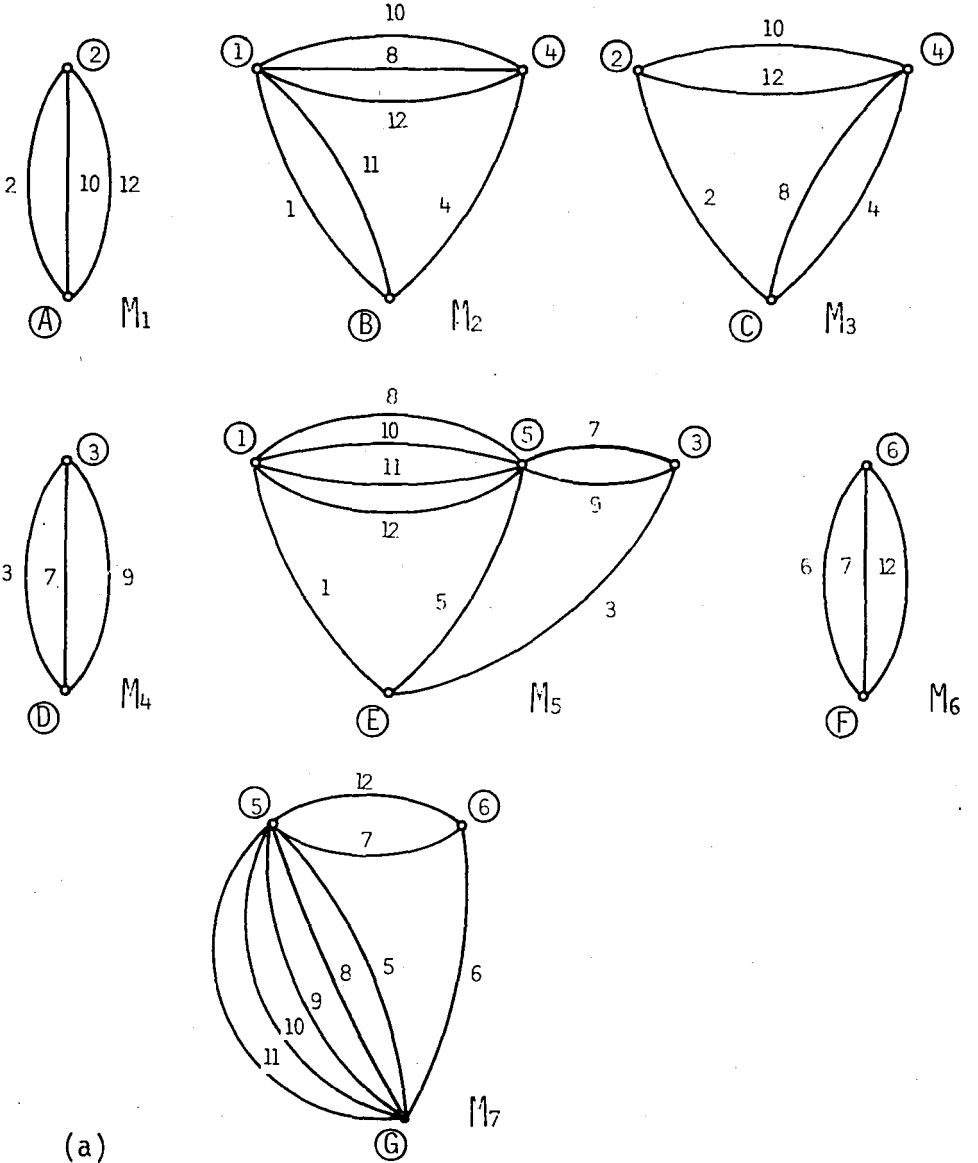
$$= \begin{matrix} & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & [ & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & ] \\ 6 & [ & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ] \end{matrix}$$

$$M_7 = M(1356)_2$$

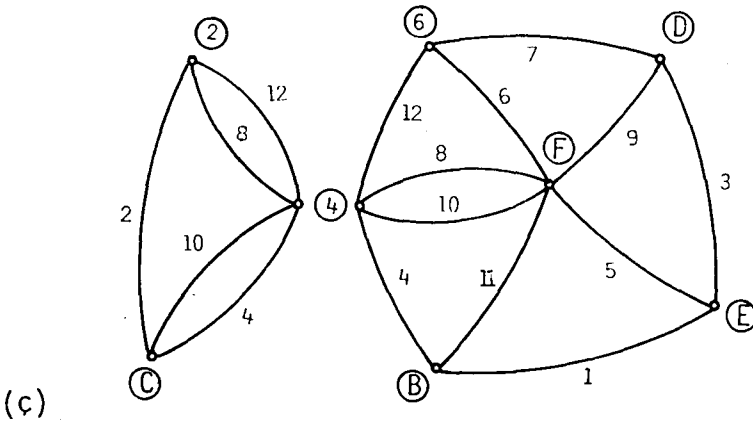
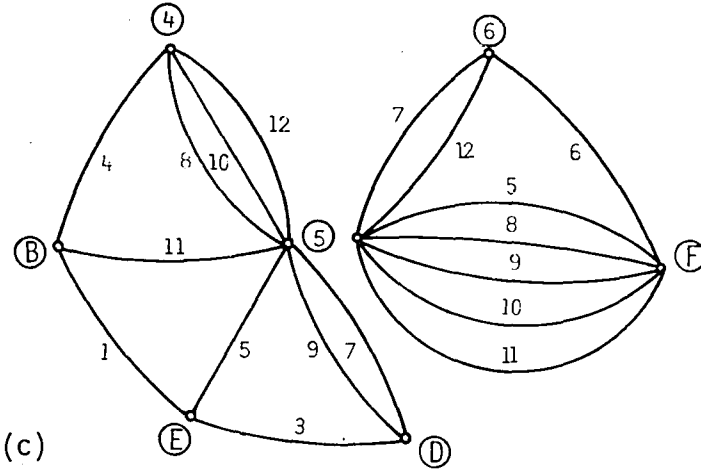
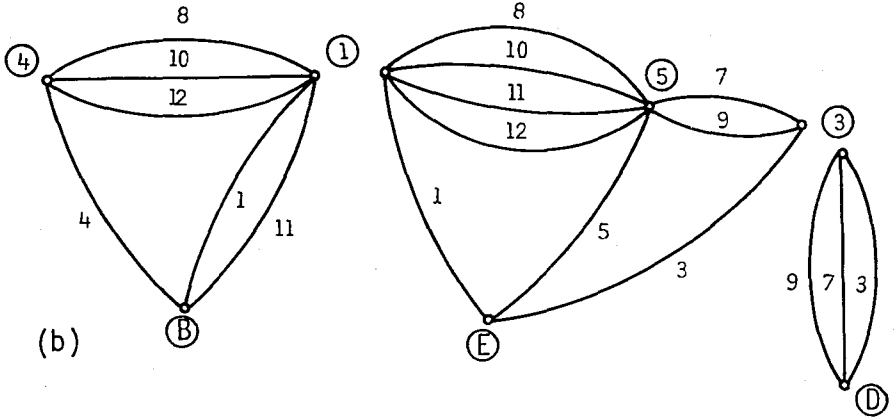
$$= \begin{matrix} & 6 & 7 & 12 \\ 6 & [ & 1 & 1 & 1 & ] \end{matrix}$$

### 3. BÖLÜM

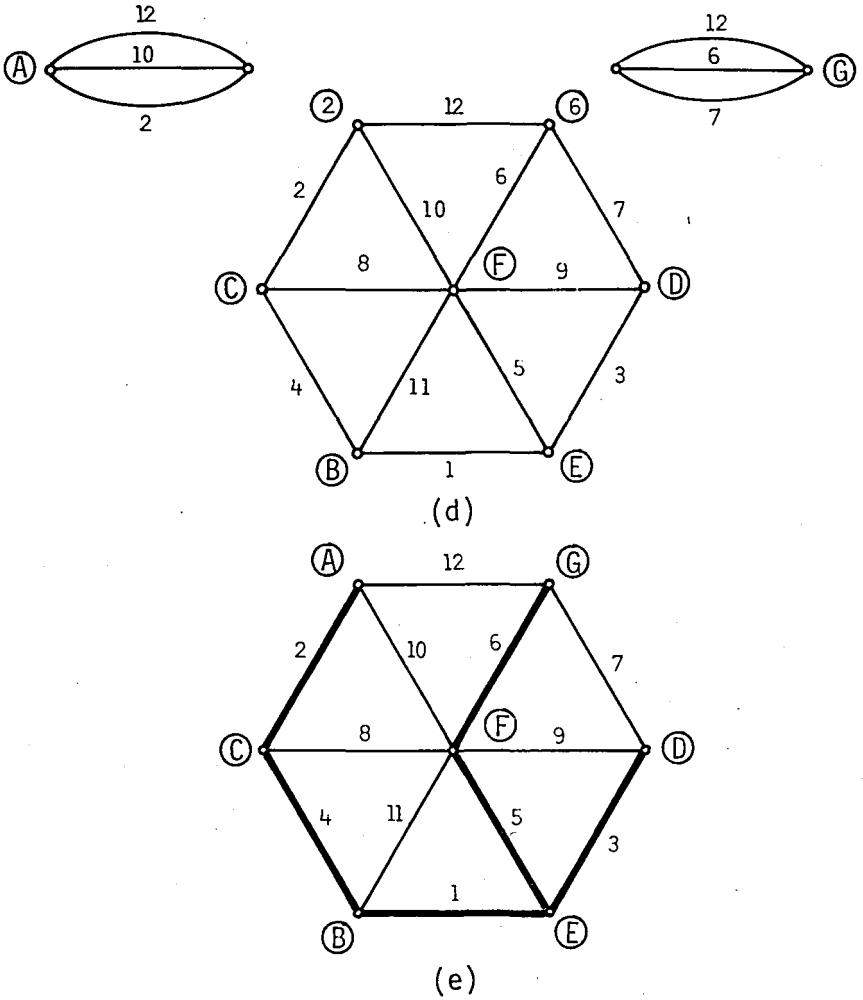
dir. Bu matrislere ilişkin altçizgeler ve berleştirmeleri Şekil 3.4.5 de gösterilmiştir.



### 3.4 t-Kesitleme matrisinin gerçekleştirimi



### 3. BÖLÜM



Şekil 3.4.5 Temel  $M$ -matrislerine ilişkin altçizgelerden aranan çizgenin bulunması.

Temel  $M$ -matrisleri elde edildikten sonra, ilişkin çizgenin çakışım matrisi, geçiş matrisi diye adlandıracağımız bir matris dönüşümü ile de bulunabilir.



### 3.4 t-Kesitleme matrisinin gerekleştirmi

**Tanım 3.4.3** Geçiş matrisi  $G = [g_{ij}]$  nin öğeleri: eğer  $i$  ninci dizeğe ilişkin bağımsız temel  $M_i$ -matrisi,  $Q_t$  matrisinin  $j$  ninci dizeğini içeriyorsa  $g_{ij} = 1$  : bu koşul sağlanmıyorsa  $g_{ij} = 0$  olarak tanımlanır.

Yukarda incelediğimiz örneğe ilişkin geçiş matrisi,

$$G = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

olarak bulunabilir. Burada  $M_7$  bağımsız olmadığı için gznne alınmamıştır. İlişkin izgenin akışım matrisi,

$$P = G Q_t$$

ilişkisinden,

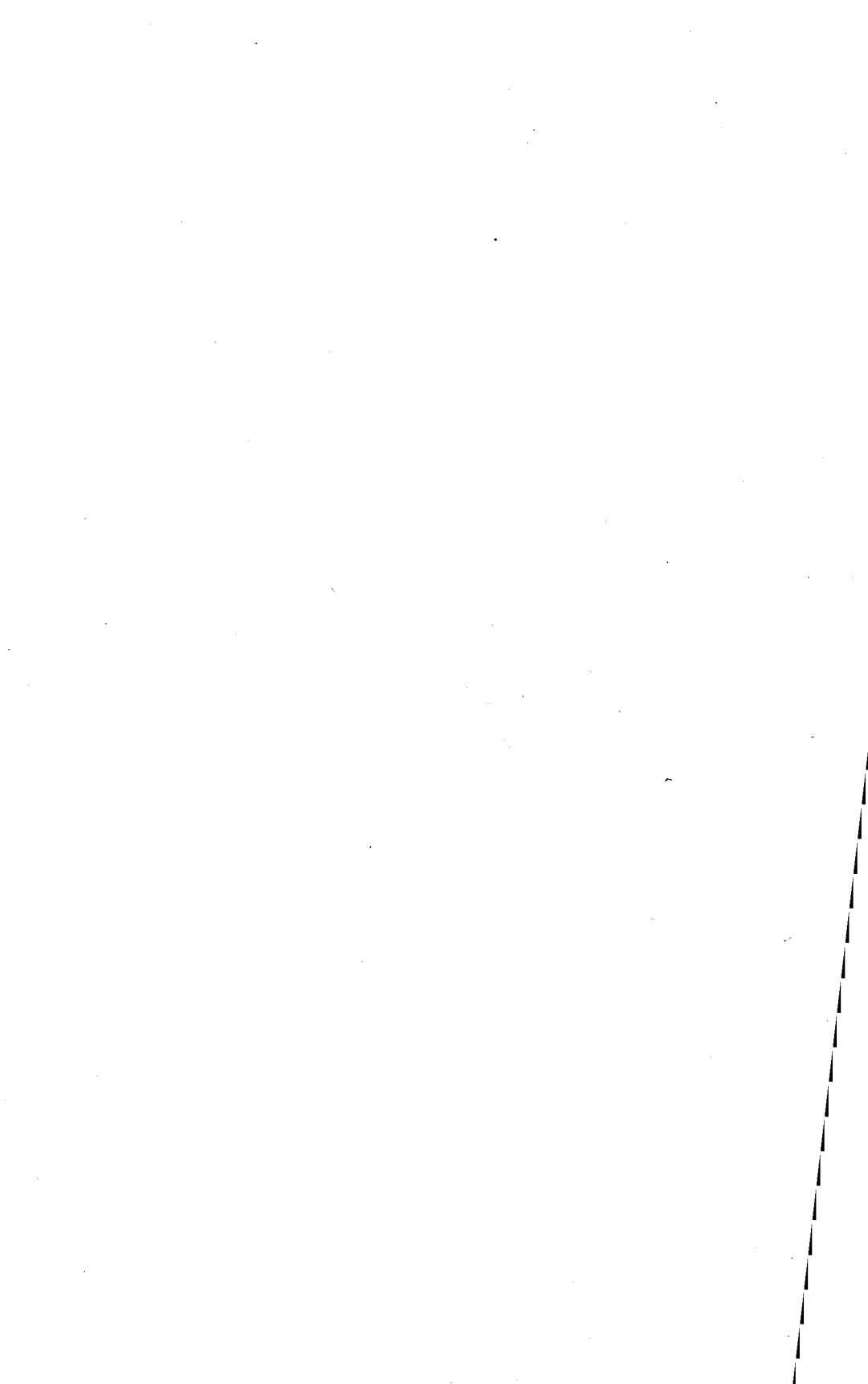
### 3. BÖLÜM

---

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

elde edilir.

$Q_t$ -matrisinin gerçekleştirimine ilişkin gerek ve yeter koşulu, 4.Bölümde *düzlemsellik* ve *çifteşlik* kavramlarını açıkladıktan sonra vereceğiz.



## 4. BÖLÜM

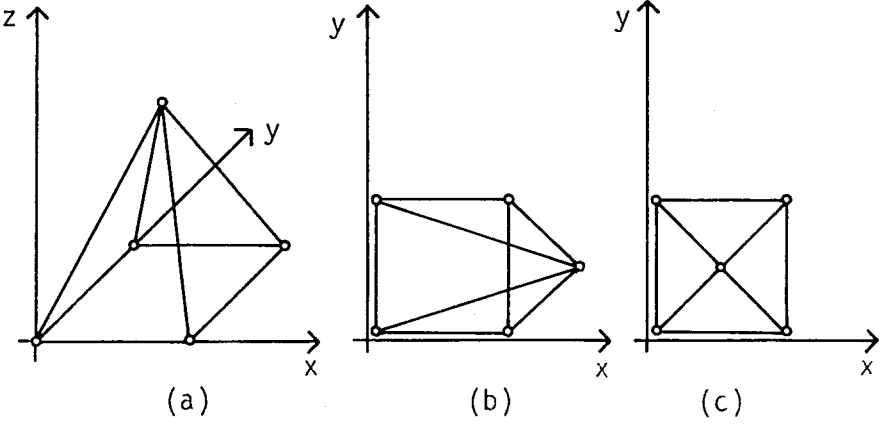
### DÜZLEMSELLİK

Bu son bölümde, çizgenin hangi koşullar altında düzleme çizilebileceğini, düzleme çizilebilen çizgelerin temel özelliklerini, düzleme çizilemeyen çizgelerin ne tür yüzeyler üzerine çizilebileceğini ve bu sorunlara ilişkin konuları ele alıp, okuyucu henüz yanıtlanmamış ya da belki hiç yanıtlanamayacak bir çok açık soru ile başbaşa bırakarak, çizgeler üzerinde yaptığımız bu kısa incelemeyi bir tatlı sona bağlayacağız,

#### 4.1 DÜZLEMSEL ÇİZGELER

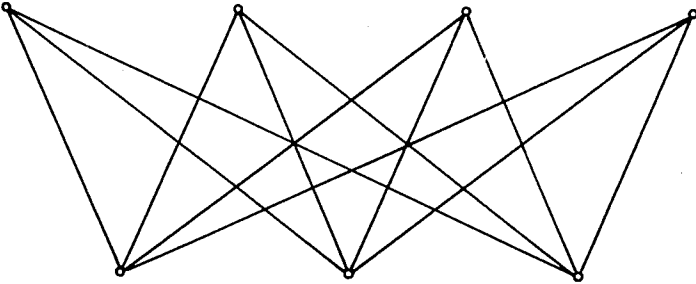
Soyut olarak tanımlanan  $\mathcal{C}(d,a)$  çizgesine ilişkin ve üç boyutlu uzaya çizilebilen geometrik bir çizge her zaman vardır. Ancak, genel bir çizgeyi düzleme çizmek istersek, karşımıza bazı zorluklar çıkacaktır. Şekil 4.1.1a da gösterilen, 3 boyutlu uzaya çizilmiş  $\mathcal{C}(5,8)$  çizgesini düşünelim. Bu çizge, düşünülmeden rasgele biçimde düzleme çizilirse, Şekil 4.1.1b de gösterildiği gibi ayrıtları düğümlerden başka yerlerde de kesişen bir çizim ile sonuçlanabilir. Ancak,  $\mathcal{C}(5,8)$  in bir az düşünülerek yapılacak çizimi, Şekil 4.1.1c de olduğu gibi, ayrıtları yalnız

## 4.1 Düzlemsel çizgeler



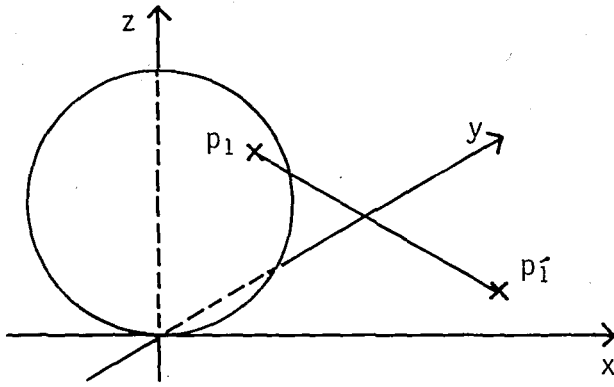
Şekil 4.1.1  $\zeta(5,8)$  çizgesinin değişik çizimleri.

düğümelerde kesişen bir çizimle sonuçlanabilir. Bu gözlemin sonucu olarak, 'Her çizge, ayrıtları yalnız düğümlerde keşişecek biçimde düzleme çizilebilir mi?' gibi bir soru aklımıza gelebilir. Şekil 4.1.2 de gösterilen  $I(4,3)$  çizgesini incelersek, böyle bir sorunun karşılığını, 'her



Şekil 4.1.2 Düzleme çizilemeyen  $I(4,3)$  çizgesi.

çizge düzleme çizilemez' diye verebiliriz. Şekil 4.1.3 de de açıklandığı gibi, güney kutup özek ve kuzey kutup sonsuz alınarak, yuvarlağın düzlem üzerine izdüşümün yapılabileceğini biliyoruz. Öyleyse, düzleme çizilebilen her çizgenin, yuvarlağa da çizilebileceğini söyleyebiliriz.



Şekil 4.1.3 Yuvarlağın düzleme izdüşümü.

**Tanım 4.1.1** Ayrıtları düğümlerden başka hiçbir yerde kesişmeden, yuvarlağa çizilebilen çizgelere düzlemsel çizge denir.

Bu tanımdan, Şekil 4.1.1 deki çizgenin düzlemsel olduğu anlaşılır. Düzleme çizilemeyen çizgelere, düzlemsel olmayan çizge diyeceğiz. Düzlemsel bir çizgede, ayrıtların düzlem üzerinde tanımlandığı kapalı bölgelere çizgenin ıçyüzleri, çizgenin

## 4.1 Düzlemsel çizgeler

---

dışında kalan bölgeye ise çizgenin dışyüzü diyeceğiz. Örneğin, Şekil 4.1.1 de gösterilen  $\zeta(5,8)$  çizgesinin beş yüzü ( $y = 5$ ) vardır. Bunlardan dördü içyüz, biri ise dışyüzdür.  $\zeta(d,a)$  nın düzlemsel olabilmesi için gerek ve yeter koşulların incelenmesini, Altbölüm 4.2 ye erteleyerek, düzlemselliğin çizgeye getirdiği özellikleri düşünelim.

**Teorem 4.1.1** (Euler eşitliği)  $y$  sayıda yüzü olan bağlı ve düzlemsel  $\zeta(d,a)$  çizgesi için,

$$d - a + y = 2$$

eşitliği doğrudur.

*Tanıt*

Eşitliğin,

$$d = 1 \quad ; \quad a = 0 \quad ; \quad y = 1$$

için doğruluğu hemen görülür. Öyleyse, eşitliğin

$$a \geq 1 \quad ; \quad d \text{ ve } y$$

için de doğru olduğunu varsayalım. Eğer çizge ağaç ise,

$$a = d - 1 \quad \text{ve} \quad y = 1$$

olacağından, eşitlik bütün ağaç çizgeler için de

doğrudur.

$$a > d - 1$$

olsun. Ayırıkları dallar ( $\delta$ ) ve kirişler ( $\kappa$ ) diye iki kümeye ayıralım,

$$a = \delta + \kappa \quad \text{ve} \quad \delta = d - 1$$

Bu ayırım sonucu,  $\kappa$  sayıda kirişin ağaca eklenmesinin, çizgede  $\kappa$  sayıda yüz oluşturacağı hemen görülür. Öyleyse eşitlik, düzlemsel çizgelerdeki bütün  $a$ ,  $d$  ve  $y$  değerleri için de doğrudur. ■

**Teorem 4.1.2** Düğüm sayısını arttırmaksızın, herhangi bir ayırıtın eklenmesi ile düzlemselliği bozulan bağlı düzlemsel çizgelere, *dönüşül düzlemsel çizge* denir.

Çizgede tekçevrelerin ya da koşut ayırıklarının bulunması, Tanım 4.1.2 nin kapsamı dışında bırakılmıştır.

**Teorem 4.1.2**  $d \geq 3$  için, eğer  $\mathcal{C}(d,a)$  dönüşül düzlemsel ise,  
 $a = 3d - 6$   
eşitliği doğrudur.



## 4.1 Düzlemsel çizgeler

---

*Tanı t*

$\zeta(d,a)$  nın dönüşül düzlemsel olabilmesi için, her yüzün üç ayrıttan oluşan bir *üçgen* olması gerekmektedir.  $\zeta(d,a)$  da  $y$  yüz varsa, bu yüzleri tanımlayan ayrıtların sayısı  $3y$  olacaktır. Öteyandan, her ayrıt iki ayrı yüzde de bulunacağı için,

$$2a = 3y$$

dir. Euler eşitliğini, bu koşulu da kullanarak yazarsak,

$$d - a + \frac{2}{3}a = 2$$

$$a = 3d - 6$$

buluruz. ■

**Teorem 4.1.3** Düzlemsel  $\zeta(d,a)$  çizgesinde, kertesini 6 dan az olan en az bir düğüm vardır.

*Tanı t*

$\zeta(d,a)$  düzlemsel olduğu için, Teorem 4.1.2 den,

$$a \leq 3d - 6$$

eşitsizliğini biliyoruz. Genellemenin birşey yitirmeksizin,  $\zeta(d,a)$  da kertesini  $m$  ( $m \leq 5$ ) olan

#### 4. BÖLÜM

---

t sayıda ve kertesi n ( $n > 5$ ) olan d - t sayıda düğüm bulunduğunu varsayalım. Öyleyse,

$$2a = tm + n ( d - t )$$

ya da

$$tm + n(d - t) \leq 6d - 12$$

yazabiliriz. Buradan da,

$$12 + (n - 6) d \leq (n - m) t$$

elde ederiz.

$$n - 6 \geq 0$$

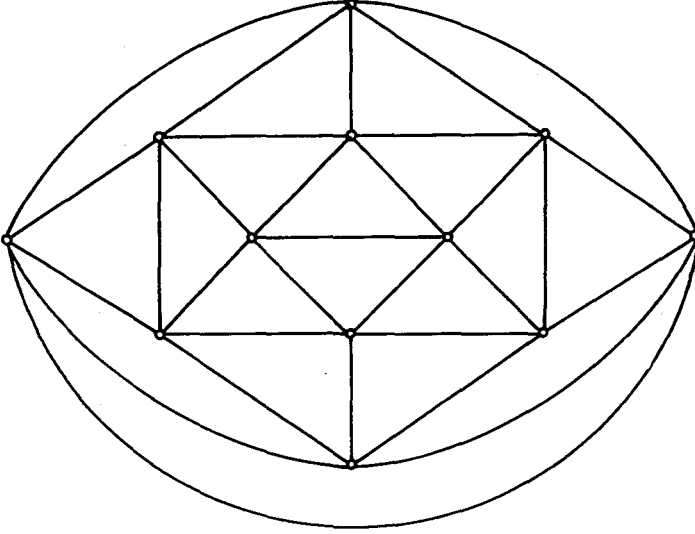
koşulundan, t nin sıfır olamayacağı hemen görülecektir. ■

Teorem 4.1.2 den, 12 düğümlü dönüşül düzlemsel bir çizgede, 30 ayrıtın bulunduğunu görürüz. Ayrıca, bu çizgenin eşkerte dağılımlı olmasını da istiyorsak, düğüm kertelerinin 5 e eşit olacağını buluruz. Bu koşulları sağlayan bir çizge Şekil 4.1.4 de gösterilmiştir. Aynı koşulları sağlayan ve bu çizgeye eşyapılı olmayan başka bir çizge daha var mıdır ? (düşünün).

Buraya kadarki incelememizden, bütün çokyüzlülerin düzlemsel bir çizge olarak ya da bütün düzlemsel

## 4.1 Düzlemsel çizgeler

---



Şekil 4.1.4 12 düğümlü dönüşül düzlemsel bir çizge.

çizgelerin bir çokyüzlü olarak düşünülebileceği sonucuna varabiliriz. Öyleyse bu gözlem üzerinde biraz daha duralım.  $(d,a)$  da kertesini  $i$  olan düğümlerin sayısını  $d_i$  ve  $i$  sayıda ayrıtla çevrili yüzlerin sayısını ise  $y_i$  ile gösterelim. Bir yüz en az üç ayrıtla tanımlanabileceğinden,

$$\begin{aligned} 2a &= \sum_{i \geq 3} i d_i \\ &= \sum_{i \geq 3} i y_i \end{aligned}$$

yazabiliriz.

**Teorem 4.1.4** Çokyüzlünün en az bir yüzü,

#### 4. BÖLÜM

---

$n$  ( $n=3,4,5$ ) sayıda ayrıttan oluşan bir çevre ile tanımlanır.

*Tanıt*

Teoremi çelişki ile tanıtlayacağız. Çokyüzlüde, teoremin gerektirdiği nitelikte bir yüz olmasın,

$$y_3 = y_4 = y_5 = 0$$

Öyleyse çokyüzlüdeki ayrıtların toplamı,

$$\begin{aligned} 2a &= \sum_{i \geq 6} i d_i \\ &= \sum_{i \geq 6} i y_i \geq 6 \sum_{i \geq 6} y_i = 6y \end{aligned}$$

koşulunu sağlayacaktır. Demek ki,

$$a \geq 3y$$

olacaktır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} 2a &= \sum_{i \geq 3} i d_i \\ &\geq 3 \sum_{i \geq 3} d_i = 3d \end{aligned}$$

ya da

$$a \geq \frac{3}{2} d$$

olduğunu biliyoruz. Öyleyse Euler eşitliğinden,

## 4.1 Düzlemsel çizgeler

---

$$d - a + y = 2$$

$$a \leq \frac{2}{3} a + \frac{1}{3} a - 2$$

$$0 \leq -2$$

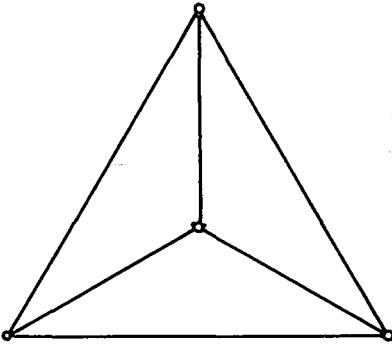
elde ederiz. Bu çelişki, ancak  $y_3 = y_4 = y_5 = 0$  koşulunu kaldırarak giderilebilir. ■

**Tanım 4.1.3** Belli bir  $i$  ve  $j$  için,

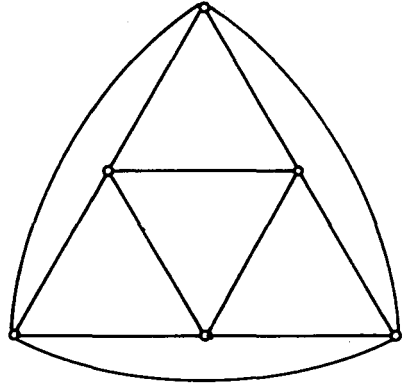
$$y = y_i \text{ ve } d = d_j$$

koşulunu sağlayan çokyüzlülere düzgün çokyüzlü denir.

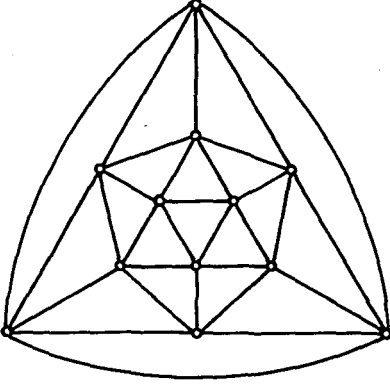
Düzgün çokyüzlülere verilebilecek beş örneğin düzlemsel çizimleri Şekil 4.1.5 de gösterilmiştir.



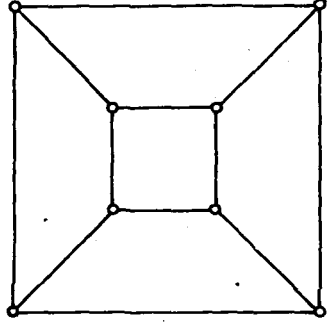
(a)



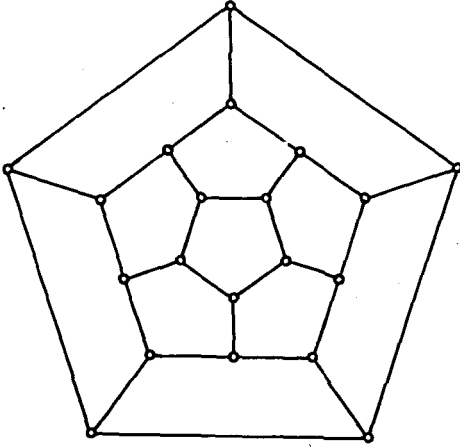
(b)



(c)



(ç)



(d)

Şekil 4.1.5 Düzgün çokyüzlüler.

## 4.1 Düzlemsel çizgeler

---

**Teorem 4.1.5** Yalnız 5 değişik düzgün çokyüzlü vardır.

*Tanıt*

Teoremi, olabilecek bütün seçenek durumları inceleyerek tanımlayacağız. Euler eşitliğinden, düzgün çokyüzlünün tanımladığı  $\zeta(d,a)$  için,

$$2 = d - a + y$$

$$-8 = 4a - 4d - 4y$$

$$= 2a + 2a - 4d - 4y$$

$$= \sum_{n \geq 3} n y_n + \sum_{n \geq 3} n d_n - 4 \sum_{n \geq 3} d_n - 4 \sum_{n \geq 3} y_n$$

$$= \sum_{n \geq 3} (n - 4) (y_n + d_n)$$

yazabiliriz.  $\zeta(d,a)$  düzgün olduğu için,

$$y = y_i \quad \text{ve} \quad d = d_j$$

ya da

$$-8 = (i - 4)y_i + (j - 4)d_j$$

dir. Ayrıca teorem 4.1.4 den,

$$3 \leq i \leq 5 \quad \text{ve} \quad 3 \leq j \leq 5$$

koşullarının da sağlandığını biliyoruz. Demek ki,  $i$  ve  $j$  nin alabileceği değerlere göre incelenecek

#### 4. BÖLÜM

---

9 ayrı seçenek durum ortaya çıkmaktadır.

$$\begin{aligned} 2a &= iy_i \\ &= jd_j \end{aligned}$$

koşulunu da göz önüne alarak, bu durumları inceleyelim.

*Durum 1 :*

$$\begin{aligned} i &= 3 & ; & & j &= 3 \text{ için,} \\ -8 &= -y_3 - d_3 & ; & & 3y_3 &= 3d_3 \\ y_3 &= d_3 = 4 \end{aligned}$$

elde edilecek ve  $\zeta(d,a)$ , Şekil 4.1.5a da gösterilen çizgeye eşbiçimli olacaktır.

*Durum 2 :*

$$\begin{aligned} i &= 3 & ; & & j &= 4 \text{ için,} \\ -8 &= -y_3 & ; & & 3y_3 &= 4d_4 \\ y_3 &= 8 & ; & & d_4 &= 6 \end{aligned}$$

elde edilecek ve  $\zeta(d,a)$ , Şekil 4.1.5b de gösterilen çizgeye eşbiçimli olacaktır.

*Durum 3 :*

$$\begin{aligned} i &= 3 & ; & & j &= 5 \text{ için,} \\ -8 &= -y_3 + d_5 & ; & & 3y_3 &= 5d_5 \end{aligned}$$



## 4.1 Düzlemsel çizgeler

---

$$y_3 = 20 \quad ; \quad d_5 = 12$$

elde edilecek ve  $\zeta(d,a)$ , Şekil 4.1.5c de gösterilen çizgeye eşbiçimli olacaktır.

*Durum 4 :*

$$\begin{aligned} i &= 4 & ; & & j &= 3 \text{ için,} \\ -8 &= -d_3 & ; & & 4y_4 &= 3d_3 \\ d_3 &= 8 & ; & & y_4 &= 6 \end{aligned}$$

elde edilecek ve  $\zeta(d,a)$ , Şekil 4.1.5ç de gösterilen çizgeye eşbiçimli olacaktır.

*Durum 5 :*

$$\begin{aligned} i &= 4 & ; & & j &= 4 \\ -8 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilecektir. Böylesine çelişkili duruma ilişkin bir çizge varolamaz.

*Durum 6 :*

$$\begin{aligned} i &= 4 & ; & & j &= 5 \text{ için} \\ -8 &= d_5 \end{aligned}$$

elde edilecektir. Böylesine çelişkili duruma ilişkin bir çizge varolamaz.

#### 4. BÖLÜM

---

$$\begin{aligned} i &= 5 & ; & & j &= 3 \text{ için,} \\ -8 &= y_5 - d_3 & ; & & y_5 &= 3d_3 \\ y_5 &= 12 & ; & & d_3 &= 20 \end{aligned}$$

elde edilecek ve  $\zeta(d,a)$ , Şekil 4.1.5d de gösterilen çizgeye eşbiçimli olacaktır.

*Durum 8 :*

$$\begin{aligned} i &= 5 & ; & & j &= 4 \text{ için,} \\ -8 &= y_5 \end{aligned}$$

elde edilecektir. Böylesine çelişkili duruma ilişkin bir çizge varolamaz.

*Durum 9 :*

$$\begin{aligned} i &= 5 & ; & & j &= 5 \text{ için,} \\ -8 &= y_5 + d_5 \end{aligned}$$

Demek ki, yalnız 5 değişik düzgün çokyüzlü tanımlanabilir. ■

Bu teoremin, Şekil 4.1.4 de gösterilen çizgeye ilişkin açık bıraktığımız sorunun da yanıtını verdiği gözden kaçmamalıdır. (Şekil 4.1.4 ve Şekil 4.1.5c deki çizgeler eşyapılıdır). Düzlemsellik ile ilgili özelliklerde bir genelleme yapabilmek için, önce *kökteşlik* kavramı açıklayalım.

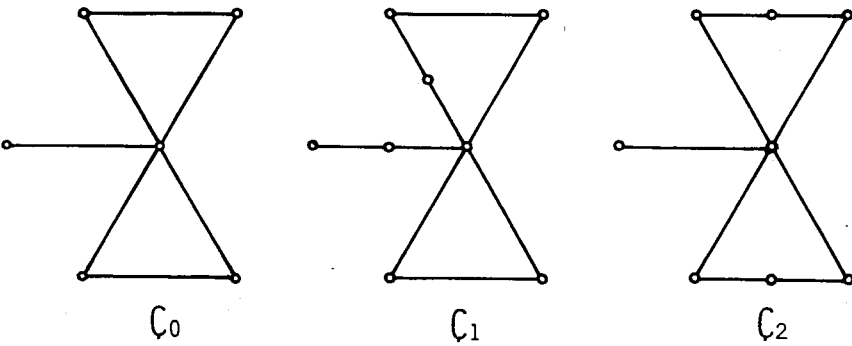
## 4.1 Düzlemsel çizgeler

---

**Tanım 4.1.4** Çizgedeki bir ayrıtın, dizi bağlı iki ayrıtla değiştirilmesine, dizisel değiştirim işlemi denir.

**Tanım 4.1.5** Dizisel değiştirim işlemlerinin  $\zeta_0(d_0, a_0)$  çizgesine yeterince uygulanması sonucu elde edilen  $\zeta_1(d_1, a_1)$  ve  $\zeta_2(d_2, a_2)$  çizgelerine eşkökenli çizge,  $\zeta_0(d_0, a_0)$  çizgesine de bu eşkökenli çizgelerin kökenu denir.

Şekil 4.1.6 da gösterilen  $\zeta_1$  ve  $\zeta_2$  çizgelerinin eşkökenli, kökenlerinin ise  $\zeta_0$  çizgesi olduğu hemen görülebilir.



Şekil 4.1.6 Eşkökenli çizgeler.

**Tanım 4.1.6** Çizgedeki koşul bağılı ayrıtların tek bir ayrıtla değiştirilmesi ve tek çevrelerin çizgeden atılması işlemlerine çizgenin temizlenmesi denir.

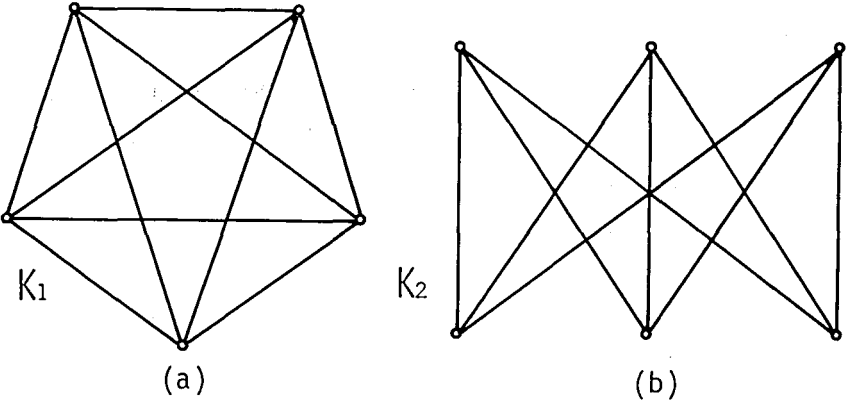
**Tanım 4.1.7**  $\zeta(d,a)$  daki  $d_i$  ve  $d_j$  düğümlerinin çakıştırılmasından  $(d_i \equiv d_j)$  doğan yeni çizgenin temizlenmesi ile başka bir çizge elde edilmesi işlemine,  $\zeta(d,a)$  nın  $d_i$  ve  $d_j$  düğümlerine göre büzüştürülmesi denir.

**Tanım 4.1.8** Belli sayıda büzüştirme işlemi uygulayarak  $\zeta(d,a)$  dan elde edilen  $\zeta_0$  çizgesine,  $\zeta(d,a)$  nın büzüşük altçizgesi denir.

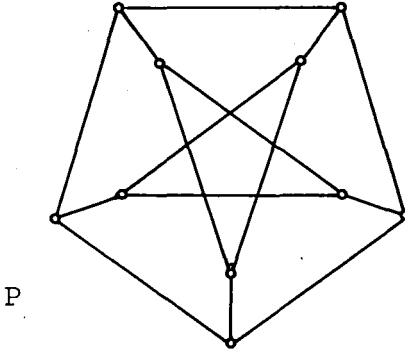
Şekil 4.1.6 da gösterilen  $\zeta_0$  çizgesi,  $\zeta_1$  ve  $\zeta_2$  çizgelerinin büzüşük altçizgesidir. İlk bakışta birbirlerine özdeş işlemlermiş gibi gözükken büzüştirme ve dizisel değiştirim işlemleri, kökünde oldukça değişiktir. Önemlerinden dolayı özel bir ad verilen, sırasıyla Şekil 4.1.7 ve Şekil 4.1.8 de gösterdiğimiz Kuratowski çizgeleri ile Peterson çizgesini düşünelim. Hernekadar  $K_1$  ve  $P$  eşkökenli gibi gözükse bile  $P$  ve  $K_2$  eşkökenli ve  $K_1, P$  nin büzüşük

## 4.1 Düzlemsel çizgeler

---



Şekil 4.1.7 Kuratowski çizgeleri.



Şekil 4.1.8 Peterson çizgesi.

altçizgesidir (kanıtlayınız).

Tanımlanmalarına girmeden, eşkökenlilik ve büzüşme arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremler ile verebiliriz.

**Teorem 4.1.6** Eğer  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$  in kökeni ise  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$  in büzüşük altçizgesidir.

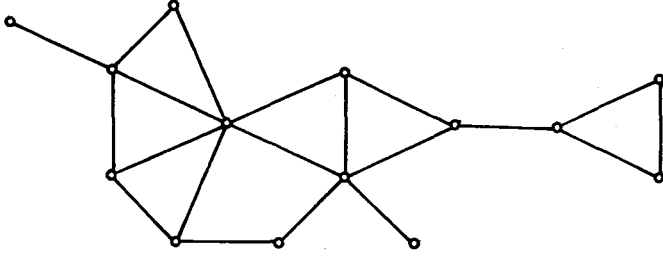
**Teorem 4.1.7** Eğer  $\mathcal{C}_1$  in, kökeni  $\mathcal{C}_0$  olan bir altçizgesi varsa,  $\mathcal{C}_0$   $\mathcal{C}_1$  in büzüşük altçizgesidir.

Bundan böyle, iki çizge arasında büzüşme ya da eşökenlilik ilişkisi varsa, daha çok ayrıntılarına girmeden, bu çizgelere *kökteş* diyeceğiz.

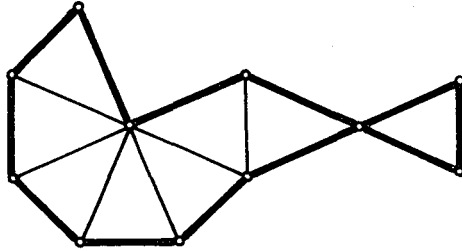
Kökteşliği böylesine genel bir biçimde tanıtladıktan sonra Peterson çizgesinin, her iki Kuratowski çizgesi ile kökteş olduğunu söyleyebiliriz.

**Tanım 4.1.9** Çevre dışı ayrıtları büzüştürüldükten sonra bütün düğümleri, dış yüzü tanımlayan bir Euler çizgesi üzerinde olabilecek biçimde düzleme çizilebilen çizgelere, çepersel çizge denir.

Şekil 4.1.9a da gösterilen çizge, çepersel bir çizgedir. Çizgenin *çeperi*, Şekil 4.1.9b de kalın çizgiyle gösterilmiştir. Önemlerinden dolayı  $\Theta_1$  ve  $\Theta_2$  olarak simgelediğimiz, Şekil 4.1.10 da gösterilen çizgeler çepersel değildir.  $\mathcal{C}(d,a)$  nın çepersel olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki teorem ile verilebilir.



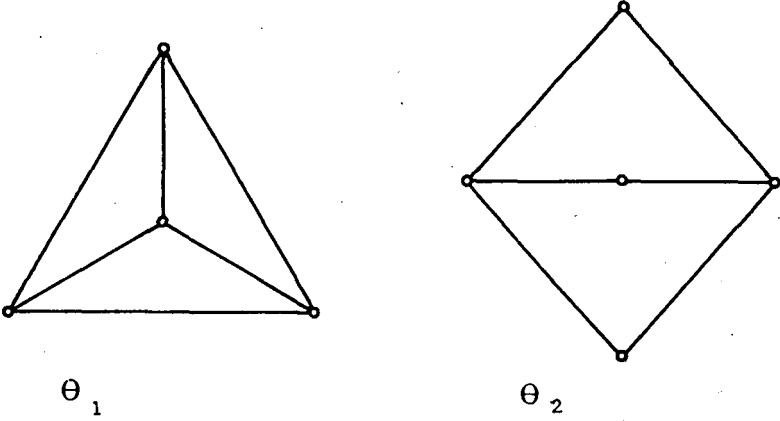
(a)



(b)

Şekil 4.1.9 Çepersel çizge.

**Teorem 4.1.8**  $\mathcal{C}(d,a)$  nın çepersel olabilmesi için gerek ve yeter koşul, hiçbir altçizgesinin  $\Theta_1$  ya da  $\Theta_2$  çizgelerine kökteş olmamasıdır.



Şekil 4.1.10 Çepersel olmayan  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  çizgeleri.

*Tanıt*

*Gerek Koşul :*

Her iki çizge de çepersel olmadığı için, gerek koşulun doğruluğu hemen görülecektir.

*Yeter Koşul :*

$\zeta(d,a)$  nın çepersel olmadığını varsayalım.  
 $\zeta$ ,  $\zeta(d,a)$  da çizilen ve en çok düğümü içeren bir çevre olsun. Çizgenin çepersel olmaması varsayımından dolayı,  $\zeta$  çevresinin içinde kalan  $d_0$  ile göstereceğimiz en az bir düğüm vardır. Böylesine bir düğümün varlığı ise, incelenmesi gerekli iki durum ortaya çıkarır.



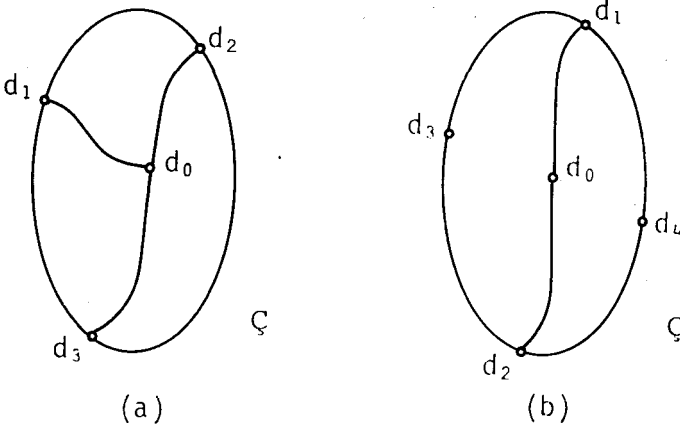
## 4.1 Düzlemsel çizgeler

*Durum 1 :*

$d_0$ ,  $\mathcal{C}$  nin dışına çizilemediğine göre  $d_0$ ,  $\mathcal{C}$  ye en az üç yolla bağlıdır (Şekil 4.1.11a). Bu da,  $\mathcal{C}(d,a)$  içinde,  $\theta_1$  çizgesi ile kökteş bir altçizgenin varolması demektir.

*Durum 2 :*

$d_0$ ,  $\mathcal{C}$  nin dışına çizilemediğine ve  $\mathcal{C}$  ye en az üç yolla bağlı olmadığına göre,  $d_0$ ,  $\mathcal{C}$  ye iki yolla bağlıdır. (bir yolla bağlı olsaydı  $\mathcal{C}$  nin dışına çizilebilirdi). Ayrıca  $\mathcal{C}$  nin üzerinde,  $d_1$  ve  $d_2$  nin dışında, Şekil 4.1.11b de gösterildiği gibi



Şekil 4.1.11 Teorem 4.1.8 in tanıtı.

en az iki düğüm daha vardır. Bu da,  $\mathcal{C}(d,a)$  nın içinde  $\theta_2$  çizgesi ile kökteş bir çizgenin varolması demektir. ■

## 4.2 DÜZLEMSELLİK İÇİN GEREK VE YETER KOŞUL

Teorem 4.1.8, çepersellik sorununu, iki temel altçizgenin incelenmesine indirgemmişti. Benzer bir durum, düzlemsellik için de vardır. Şekil 4.1.7 de Kuratowski çizgeleri diye adlandırdığımız  $K_1$  ve  $K_2$  çizgelerinden söz ettik. Düzlemsellik için gerek ve yeter koşulu, bu çizgeler türünden, aşağıdaki gibi verilebiliriz.

**Teorem 4.2.1** (Kuratowski)  $\mathcal{C}(d,a)$  nın düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul, hiçbir altçizgesinin, Kuratowski çizgelerinden birine kökteş olmamasıdır.

*Tanıt*

*Gerek Koşul :*

Her iki Kuratowski çizgesinin de düzlemsel olmadığı kolaylıkla görülebilir. Öyleyse, herhangi bir altçizgesi  $K_1$  ya da  $K_2$  ye kökteş olan bir çizge de düzlemsel değildir.

*Yeter Koşul :*

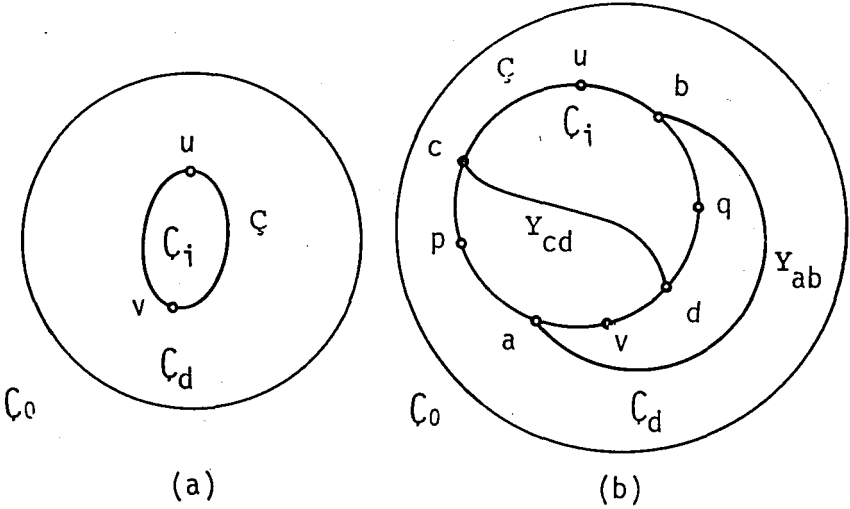
$\mathcal{C}$  nin düzlemsel olmadığını varsayalım. Genellemeden birşey yitirmeksizin,  $\mathcal{C}$  nin parçalanamayan ve düzlemsel olmayan bir altçizgesinin kökteşi  $\mathcal{C}_1$  i düşünelim. Ayrıca

## 4.2 Düzlemsellik için gerek ve yeter koşul

bu  $\zeta_1$  in,  $a_0$  diye adlandırılan ve bir ayrıtın çıkarılması ile elde edilen

$$\zeta_0 = \zeta_1 - a_0$$

altçizgesinin düzlemsel olacak biçimde seçildiğini de varsayalım.  $a_0$  ayrıtının uçdüğümleri  $u$  ve  $v$  olsun.  $u$  ve  $v$  düğümlerini de içeren,  $\zeta_0$  daki en büyük çevreyi  $\zeta$  ile göstereyim. Başka bir deyişle  $\zeta$ ,  $u$  ve  $v$  düğümlerini içeren bütün çevreleri içine alacak biçimde seçilmiş olsun.  $\zeta$  nin içinde kalan düğümlere çakışık ayrıtlar  $\zeta_i$  içsel altçizgesini,  $\zeta$  nin dışında kalan düğümlere çakışık ayrıtlar ise  $\zeta_d$  dışsal altçizgesini oluşturacaktır (Şekil 4.2.1a). Tanımladığımız bu



Şekil 4.2.1  $\zeta_0$  in  $\zeta$  çevresine göre bölünmesi.

altçizgelere göre  $C_0$ ,

$$C_0 = C_i \cup C_d \cup \zeta$$

olarak yazılabilir.  $a_0$  ayrıtının eklenmesi ile  $C_0$ 'ın düzlemselliğinin bozulması varsayımından,  $C_0$  da Şekil 4.2.1b de gösterdiğimiz gibi  $Y_{ab}$  ve  $Y_{cd}$  olarak adlandırılan,  $\zeta$  ye göre bir dışsal ve bir de içsel iki yol bulunmalıdır. Bu yolların uçdüğümlerinin bağlı konumlarına göre, incelenmesi gerekli üç durum ortaya çıkacaktır. Her bir durumun ayrı ayrı incelenmesine geçmeden önce, düğümlerin bağlı konumlarını belirtecek aşağıdaki gösterimi açıklayalım.

$p$  ve  $q$ ,  $\zeta$  üzerinde dayanak aldığımız iki düğümü gösterebilir.  $\zeta$  çevresini oluşturan düğümleri, saat yelkovanının dönüş yönünde,

$$\zeta : (p, r_1, r_2, \dots, r_k, q, r_{k+1}, \dots, r_n)$$

olarak sıralayabiliriz. Bu sıralamaya göre,

$$[p \ q] \triangleq (r_1, r_2, \dots, r_k)$$

$$[q \ p] \triangleq (r_{k+1}, \dots, r_n)$$

$$(p \ q) \triangleq (p, q)$$

düğümlerini belirlesin. Tanımladığımız bu düğüm altkümelerine göre  $\zeta$  çevresini oluşturan düğümleri,

## 4.2 Düzlemsellik için gerek ve yeter koşul

$$\zeta : \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix} \mathbf{U} \begin{bmatrix} q & p \end{bmatrix} \mathbf{U} (p \ q)$$

olarak yazabiliriz.

Düğümlere ilişkin bu açıklamadan sonra  $Y_{ab}$  ve  $Y_{cd}$  yollarının uçdüğümlerinin bağıl konumlarına göre ortaya çıkan değişik durumların incelenmesine geçelim.

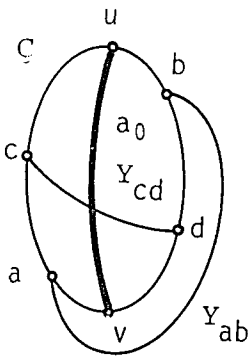
*Durum 1 :*

$$c \in \begin{bmatrix} a, u \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad d \in \begin{bmatrix} b, v \end{bmatrix} \quad (\text{Şekil 4.2.2a})$$

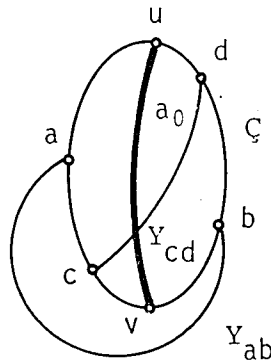
ya da

$$c \in \begin{bmatrix} v, a \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad d \in \begin{bmatrix} u, b \end{bmatrix} \quad (\text{Şekil 4.2.2b})$$

olduğunu düşünelim.



(a)



(b)

Şekil 4.2.2 Durum 1 in incelenmesi.

Bu durumda,

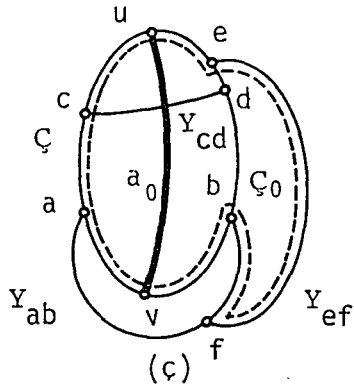
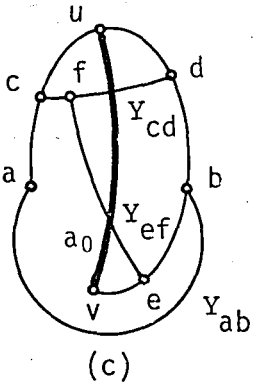
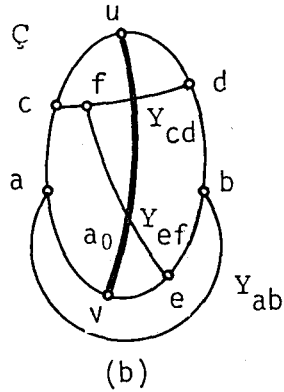
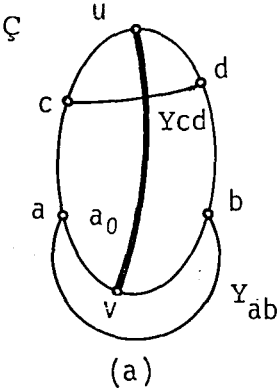
$$\zeta' = \zeta \cup Y_{ab} \cup Y_{cd} \cup a_0$$

olarak tanımlanan  $\zeta'$  altçizgesinin,  $K_2$  çizgesine kökteş olduğu hemen görülecektir.

Durum 2 :

$$c \in [a, u] \quad \text{ve} \quad d \in [u, b] \quad (\text{Şekil 4.2.3a})$$

olduğunu düşünelim.



Şekil 4.2.3 Durum 2 nin incelenmesi.

## 4.2 Düzlemsellik için gerek ve yeter koşul

---

Bu durumda,  $Y_{cd}$  yolu  $\mathcal{C}$  nin dışına çizilebilirdi. Öyleyse, çizgede ya Şekil 4.2.3b ya da Şekil 4.2.3ç de gösterildiği gibi en az bir  $Y_{ef}$  yolu daha bulunmalıdır. Şekil 4.2.3b deki çizgenin, Şekil 4.2.3c de gösterilen yeniden çizimi, böylesine bir durumda  $K_2$  çizgesine kökteş bir altçizgenin varlığını söyler. Şekil 4.2.3ç deki çizgede ise,  $\mathcal{C}$  yi içine alan bir  $\mathcal{C}_0$  çevresi vardır. Demek ki, böylesine bir durumda,  $\mathcal{C}$  nin seçimi yanlış yapılmıştır.

$$e = v \quad \text{ya da} \quad e = a$$

olması durumunda da bu sonuç geçerlidir. Ayrıca bakışımllılıktan dolayı düğümlerin,

$$c \in [v, a] \quad \text{ve} \quad d \in [b, a]$$

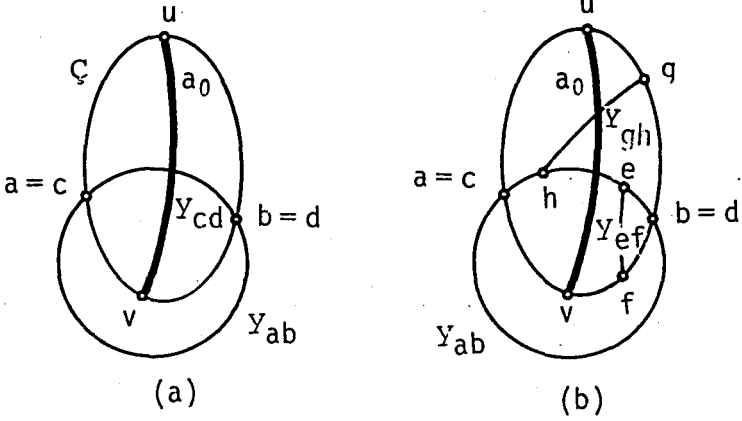
aralıklarında bulunmaları da bu durumun kapsamına girecek ve yukardaki sonucu verecektir.

*Durum 3 :*

$$b = d \quad \text{ve} \quad a = c \quad (\text{Şekil 4.2.4a})$$

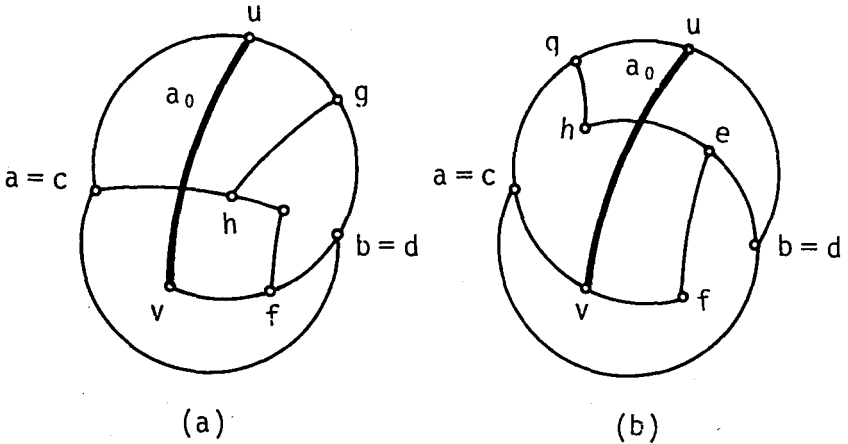
olduğunu düşünelim.

Bu durumda,  $a$  ve  $b$  düğümleri arasında iki koşul yol vardır ve her iki yol da  $\mathcal{C}$  nin dışına çizilebilirdi. Bunu engellemek için, Şekil 4.2.4b de gösterildiği gibi çizgede  $Y_{ef}$  ve  $Y_{gh}$  yolları da



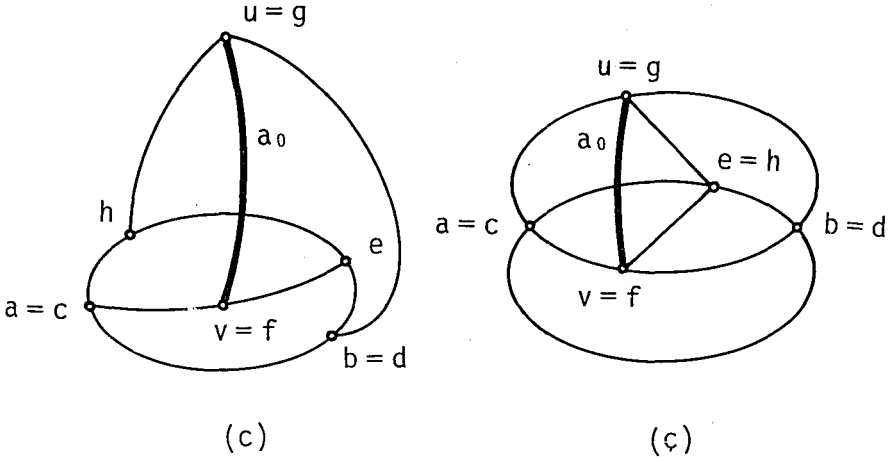
Şekil 4.2.4 Durum 3 ün incelenmesi.

bulunmalıdır.  $Y_{gh}$  yolunun konumuna göre incelenmesi gerekli dört alt durum daha ortaya çıkmaktadır. Bunlardan, Şekil 4.2.5a, b ve c de gösterilenleri  $K_2$ , Şekil 4.2.5ç de gösterilen ise  $K_1$  çizgesine kökteştir.





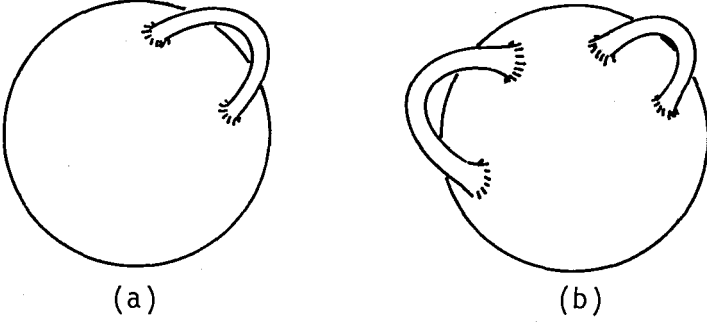
## 4.2 Düzlemsellik için gerek ve yeter koşul



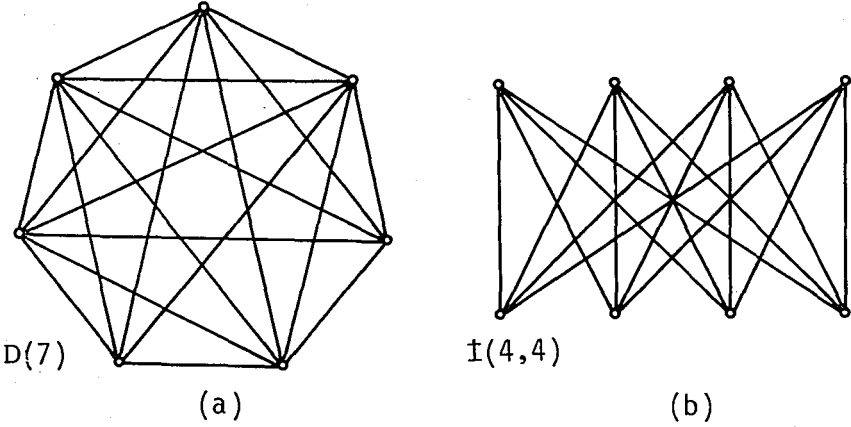
Şekil 4.2.5  $\gamma_{gh}$  yolunun konumuna göre, Durum 3 ün incelenmesi.

İncelenecek bütün durumları tükettiğimiz için, Kuratowski Teoremi de tanıtlanmış olur. ■

Kuratowski Teoremi, çizgelerin düzlemin ya da eşanlamı olarak yuvarlağın üzerine çizilebilmesi için gerek ve yeter koşulu vermektedir. Düzleme çizilemeyen bir çizgeyi, yeterince sayıda tutamak eklenmiş bir yuvarlağın üzerine çizebiliriz. Şekil 4.2.6 da, üzerine bir ve iki tutamak eklenmiş yuvarlaklara örnek verilmiştir. Yuvarlağa çizilemeyen ve Şekil 4.2.7 de gösterilen  $D(7)$  ve  $I(4,4)$  çizgelerini bir



Şekil 4.2.6 Bir ve iki tutamaklı yuvarlaklar.

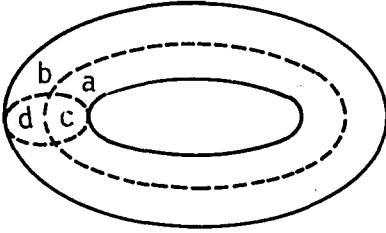


Şekil 4.2.7 Düzleme çizilemeyen  $D(7)$  ve  $I(4,4)$  çizgeleri.

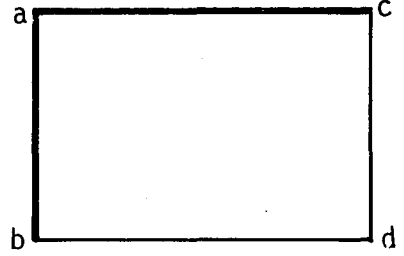
tutamaklı yuvarlağın üzerine çizebiliriz.

Böylesine bir yüzeyin, Şekil 4.2.8 de gösterildiği

## 4.2 Düzlemsellik için gerek ve yeter koşul

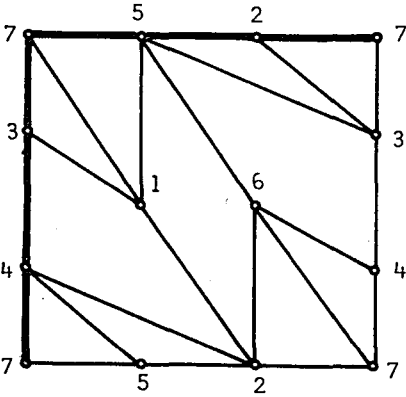


(a)



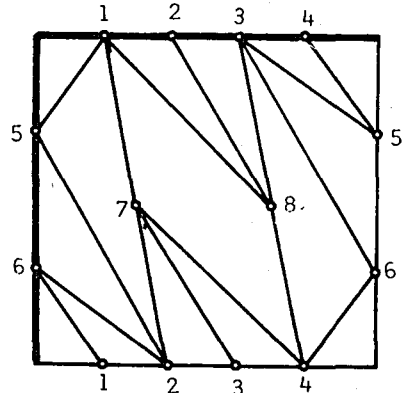
(b)

Şekil 4.2.8 Bir tutamaklı yuvarlak ve düzleme serimi. gibi kesilip düzleme serildiğini düşünelim. Yuvarlağın üzerine çizilemeyen çizgelerin bir bölümü, Şekil 4.2.8 deki yüzey üzerine



$D(7)$

(a)



$I(4,4)$

(b)

Şekil 4.2.9  $D(7)$  ve  $I(4,4)$  çizgelerinin bir tutamaklı yuvarlağa çizimi.

çizilecektir. Örneğin, Şekil4.2.7 deki çizgelerin, Şekil 4.2.8 deki yüzeye çizimleri, Şekil 4.2.9 da gösterilmiştir.

Bu gözlem, ' $\mathcal{C}(d,a)$  nın  $n$  sayıda tutamağı olan bir yuvarlağa çizilebilmesi için gerek ve yeter koşul nedir?' gibi ortaya bir çok açık sorun getirmektedir. Bu ve benzeri sorunları, düşünmek için okuyucuya bırakıyoruz.

### 4.3 ÇİFTEŞLİK

$\zeta(d,a)$  da, boşluğun (kirişlerin sayısı)

$$\kappa = a - d + p$$

aşamaların (dalların sayısı) ise,

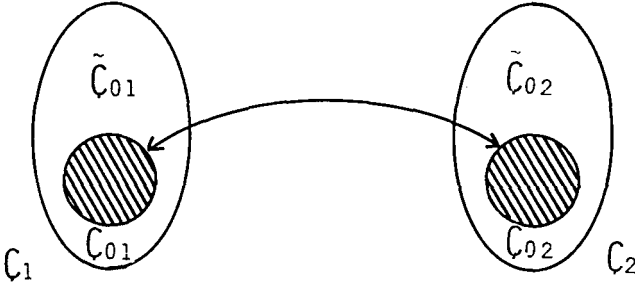
$$\delta = d - p$$

olduğunu biliyoruz. Bu iki eşitlikten ayrıtların sayısını,

$$a = \kappa + \delta$$

olarak yazabiliriz. Bu altbölümünde çifteşliğin tanımı yaparken, çizgedeki tekdüğümlerin ve tekçevrelerin varlığına değgin herhangi bir kısıtlamaya gitmeyeceğiz.

$\zeta_1$  ve  $\zeta_2$ , ayrıtları arasında 1:1 bir karşılıkma olan iki çizgeyi gösterebiliriz.  $\zeta_1$  in herhangi bir altçizgesini  $\zeta_{01}$  ( $\zeta_{01} \subset \zeta_1$ ) ve bu altçizgeyi oluşturan ayrıtlara  $\zeta_2$  içinde karşılıkma olan ayrıtları oluşturduğu altçizgeye ise  $\zeta_{02}$  ( $\zeta_{02} \subset \zeta_2$ ) diyelim (Şekil 4.3.1). Bu altçizgelerin tüm altçizgelerini ise sırasıyla,  $\tilde{\zeta}_{01}$  ve  $\tilde{\zeta}_{02}$  olarak gösterebiliriz. Tanımladığımız bu çizgelere ilişkin boşluk ve aşamaları, Çizelge 4.3.1 de açıkladığımız biçimde belirteceğiz.



Şekil 4.3.1 Ayrıtları arasında 1:1 karşılıklı olan  $C_1$  ve  $C_2$  çizgeleri.

Çizelge 4.3.1 Boşluk ve Aşama ile ilgili Gösterim

Çizge	Boşluk	Aşama
$C_1$	$K_1$	$\delta_1$
$C_2$	$K_2$	$\delta_2$
$C_{01}$	$K_{01}$	$\delta_{01}$
$C_{02}$	$K_{02}$	$\delta_{02}$
$\tilde{C}_{01}$	$K_{01}$	$\delta_{01}$
$\tilde{C}_{02}$	$K_{02}$	$\delta_{02}$

Bu ön açıklamadan sonra çiftleşliğin tanımı aşağıdaki gibi yapılabilir.

### 4.3 Çiftelik

---

**Tanım 4.3.1**  $C_1$  in her  $C_{01}$  altçizgesi için,

$$\kappa_{01} = \delta_{02} - \tilde{\delta}_{02}$$

eşitliğinin sağlandığı  $C_2$  çizgesine,  $C_1$  in çiftesi denir.

Tanım 4.3.1 de,  $C_{02} = C_2$  alınırsa  $\tilde{C}_{02} = \phi$  olacaktır. Öyleyse,  $\tilde{\delta}_{02}$  sıfıra eşittir. Buradan da,

$$\kappa_1 = \delta_2$$

buluruz. Ya da  $C_1$  ve  $C_2$  deki ayrıt sayılarının eşitliğinden,

$$a - \kappa_1 = a - \delta_2$$

$$\delta_1 = \kappa_2$$

elde ederiz. Demek ki  $C_2, C_1$  in çiftesi ise, birinin aşaması öbürünün boşluğuna eşittir.  $C_1$  çizgesinin,  $C_{01}$  ve  $\tilde{C}_{01}$  olarak iki altkümeye ayrıldığını düşünelim,

$$C_1 = C_{01} \cup \tilde{C}_{01}$$

Bu altçizgelerdeki ayrıtların sayısı,

$$a = a_1 + a_2$$

eşitliğini sağlayacaktır. Tanım 4.3.1 den,

#### 4. BÖLÜM

---

$$\kappa_{01} = \delta_2 - \delta_{02}$$

ya da

$$a - \tilde{\kappa}_{01} = a - \delta_2 + \delta_{02}$$

$$a_1 + a_2 - \tilde{\kappa}_{01} = \kappa_2 + \delta_{02}$$

$$\tilde{\delta}_{01} = \kappa_2 - (a_2 - \delta_{02})$$

$$\delta_{01} = \kappa_2 - \kappa_{02}$$

elde ederiz.

$$\delta_1 = \kappa_2$$

eşitliğinden yararlanarak,

$$\kappa_{02} \quad \delta_1 - \tilde{\delta}_{01}$$

buluruz. Demek ki  $C_2$ ,  $C_1$  in çiftesi ise  $C_1$  de  $C_2$  nin çiftesidir.

Verilen *düzlemsel* bir  $C_1$  çizgesine ilişkin çiftes çizmeyi bulmak için aşağıdaki yolu izleyebiliriz:

- $C_1$  çizgesini düzleme çiz,
- Her yüzü (dış yüzü de) bir düğüm ile belirle,
- Eğer  $a_0$  ayrıtı,  $y_1$  ve  $y_2$  yüzlerini ayırıyorsa, bu yüzleri belirleyen  $d_1$  ve  $d_2$  düğümlerini  $a_0$  ayrıtı ile bitiştir,
- c) de açıklanan işlemi, çizgedeki bütün

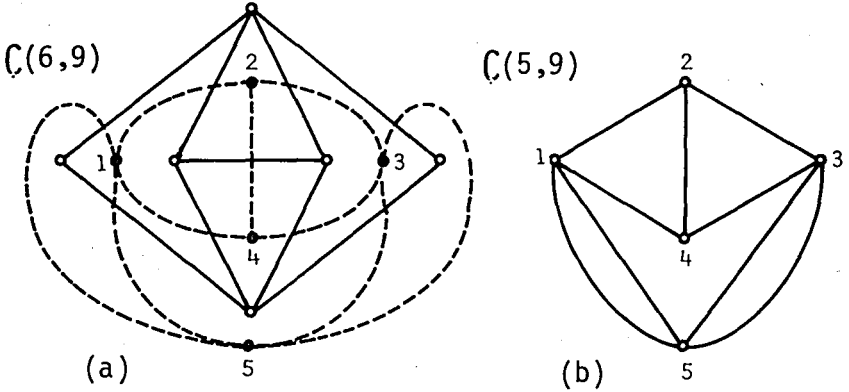


### 4.3 Çiftleşik

ayrıntlar için yinele,

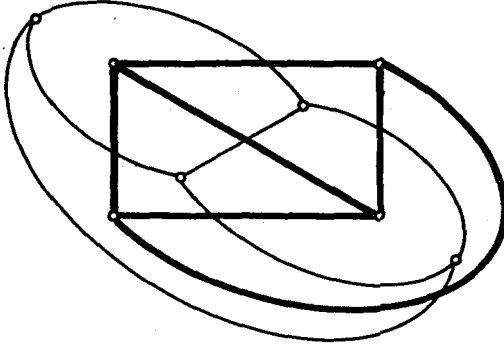
d)  $a_i$  ayrıntları,  $d_i$  düğümleri ile birlikte,  $\mathcal{C}_1$  in çiftesi  $\mathcal{C}_2$  çizgesini tanımlayacaktır.

Şekil 4.3.2 de, bu yöntemle göre düzlemsel bir çizgenin çiftesinin elde edilmesi gösterilmiştir.



Şekil 4.3.2  $\mathcal{C}(6,9)$  çizgesinde, çiftes çizge  $\mathcal{C}(5,9)$  un elde edilmesi.

İlkel bir durum olarak, tekayrıtın çiftesinin tekçevre ya da tekçevrenin çiftesinin tekayrıt ve tekdüğümün çiftesinin yine tekdüğüm olduğu gösterilebilir. Çiftesi kendisine eşbiçimli olan çizgelere, özçifteş çizge diyeceğiz. Şekil 4.3.3 de, özçifteş bir çizge gösterilmiştir (özçifteş çizgeye başka bir örnek daha bulunuz). Özçifteşlik ve ilişkin özellikleri, çizge kuramında açık sorunlarla dolu bir konudur ve üzerinde daha çok durmayacağız.



Şekil 4.3.3 Üzçiftes çizgeye örnek.

Yukarda açıkladığımız çizimsel yöntemin gerçekten düzlemsel bir çizgenin çiftesini verdiğinin;  $C_1$   $C_2$  çizgeleri  $C$  nin iki ayrı çiftesi ise, bu çizgelerin birbirlerine *ikinci düzeyden eşyapılı* olduklarının gösterilmesini okuyucuya bırakıyoruz. Ayrıca  $C_1$  ve  $C_2$  çiftes ise,  $C_1$  in t-kesitleme (t-çevre) matrisi,  $C_2$  nin t-çevre (t-kesitleme) matrisine özdeştir.

**Teorem 4.3.1** (Whitney) Bir çizgenin çiftesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul, çizgenin düzlemsel olmasıdır.

*Tanıt*

*Yeter Koşul:*

Eğer çizge düzlemselse, yukarda açıkladığımız çizimsel yöntem ile çiftes çizgeyi elde edebiliriz.

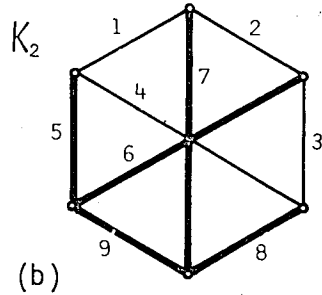
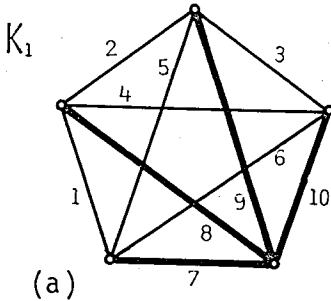
### 4.3 Çiftleşlik

*Gerek Koşul :*

Eğer çizge düzlemsel değilse, bir altçizgesi Kuratowski çizgelerinden birine kökteş olacaktır. Öyleyse, gerek koşulu tanıtlamak için her iki Kuratowski çizgesinin de çiftleşti olmadığını göstermemiz yeterlidir.

Şekil 4.3.4a da gösterilen  $K_1$  çizgesine ilişkin t-çevre matrisi,

$$B_{t1=4} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



Şekil 4.3.4 Whitney Teoreminde gerek koşulun tanıtı.

olarak yazılacaktır.  $K_1$  e çiftes olan çizgenin t-kesitleme matrisi de,

$$Q_{t1} = B_{t1}$$

olacaktır. Öyleyse,  $B_{t1}$  matrisini t-kesitleme matrisi olarak gerçekleştirelim. Alt bölüm 3.4 de açıklanan yöntemi uygularsak,

$$H(1) = \begin{matrix} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 9 & 10 \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

buradan da,

$$M(1) = B_{t1}$$

elde ederiz. Benzer olarak,

$$M(12) = B_{t1}$$

ve

$$M(124) = B_{t1}$$

bulunacaktır. Demek ki,  $B_{t1}$  matrisinin 1,2 ve 4 üncü dizikleri birer çakışım kümesidir. Ancak bu

### 4.3 Çiftelik

sonuca göre, 8 inci ayrıt 1, 2 ve 3 üncü düğümlere çakışıktır : Böylesine bir durum olamayacağından,  $B_{t1}$  matrisi bir t-kesitleme matrisi olarak düşünülemez dolayısı ile de  $K_1$  çizgesinin çiftesi yoktur.

Şekil 4.3.4b de gösterilen  $K_2$  çizgesine ilişkin t-çevre matrisi

$$B_{t2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

olarak yazılacaktır.  $K_2$  ye çiftelik olan çizgenin t-kesitleme matrisi de

$$Q_{t2} = B_{t2}$$

olacaktır. Öyleyse,  $B_{t2}$  matrisini t-kesitleme matrisi olarak gerçekleştirelim.  $B_{t1}$  in gerçekleştirimi için uyguladığımız yöntemi bu kez  $B_{t2}$  matrisi için uygularsak,

$$H(1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

buradan da,

$$M(1) = B_{t2}$$

elde ederiz. Benzer olarak,

$$M(12) = B_{t2}$$

ve

$$M(123) = B_{t2}$$

bulunacaktır. Demek ki,  $B_{t2}$  matrisinin 1, 2 ve 3 üncü dizeleri birer çakışım kümesidir. Ancak bu sonuca göre 9 uncu ayrıt 1, 2 ve 3 üncü düğümlere çakışıktır: Böylesine bir durum olamayacağından,  $B_{t2}$  matrisi bir t-kesitleme matrisi olarak düşünülemez, dolayısı ile  $K_2$  çizgesinin de çiftesi yoktur. ■

Bu teoremden yararlanarak,  $Q_t$  matrisinin gerçekleştirimi için bir gerek ve yeter koşul verebiliriz.  $Q_0$ ,

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan özel bir matrisi gösterebiliriz.

**Teorem 4.3.2** (Tutte)  $Q_t = \begin{bmatrix} Q_1 & I \end{bmatrix}$  matrisinin  $t$ -kesitleme matrisi olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki matrislerden hiçbirinin  $Q_t$  nin bir altmatrisi olmamasıdır :

a)  $\begin{bmatrix} Q'_0 & I \end{bmatrix}$  ,

b)  $\begin{bmatrix} Q'_0 & I \end{bmatrix}$  ,

c) Kuratowski çizgelerinin çevre matrisleri.

Tutte teoreminin a) ve b) de verilen koşullarını tanıtlamağa çalışın. Çiftleş çizgelerin çakışım, düğüm ve ayrıt matrisleri arasındaki ilişkilerin bulunmasını okuyucuya bırakarak, çiftleşlik üzerindeki tartışmamızı burada keseceğiz.

#### 4.4 AYRIŞMA

$\zeta(d,a)$  nın, tümleyeni dışında kalan kapsar altçizgelerini düşünelim.  $\zeta_i$ , böylesine bir kapsar altçizgeyi gösterebilir.  $\zeta(d,a)$  nın,

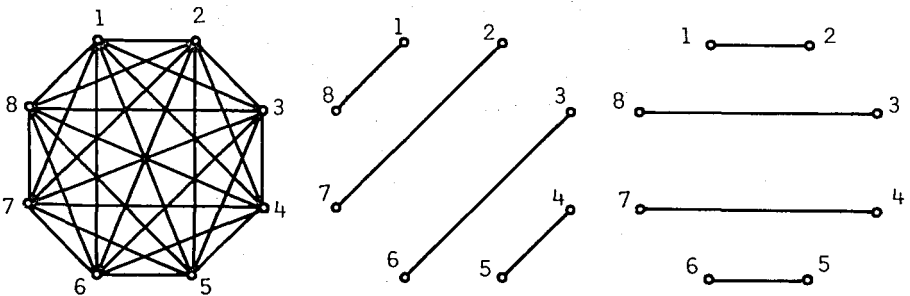
$$\zeta(d,a) = \bigcup_{(i)} \zeta_i$$

biçiminde parçalanmasına, çizgenin ayrıklarına ayrışması ve  $\zeta_i$  altçizgelerine çizgenin ayrıkları diyeceğiz.

**Tanım 4.4.1** Bütün düğümlerinin kertesisi  $n$  ye eşit olan bir ayrığa, çizgenin  $n$ -ayırığı denir.

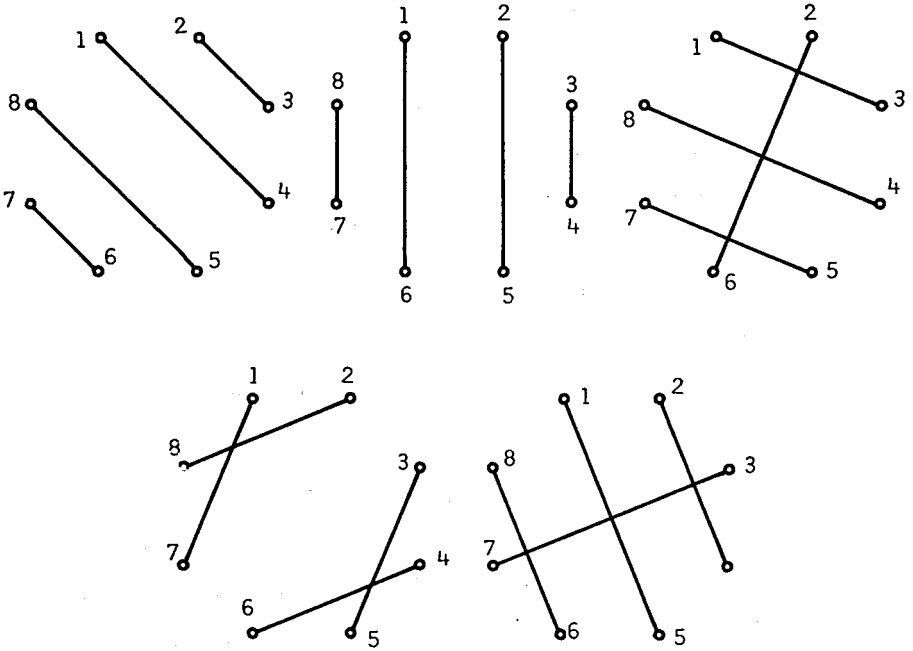
**Tanım 4.4.2** Bütün ayrıkları  $n$ -ayırığı olabilecek biçimde ayrışabilen çizgelere,  $n$ -ayırışır çizge denir.

Şekil 4.4.1 de,  $D(8)$  çizgesinin 1-ayırışımı gösterilmiştir. Düğümleri çiftsayıya eşit olan dolu çizgelerin 1-ayırışırılığı hemen görülebilir. ayrıca, eşkerteli  $I(n,n)$  çizgeleri de 1-ayırışırdır.





## 4.4 Ayrışma

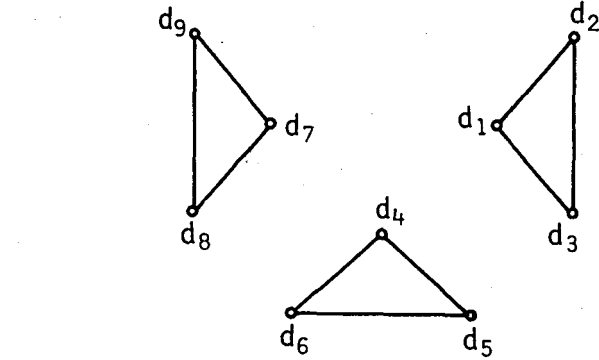
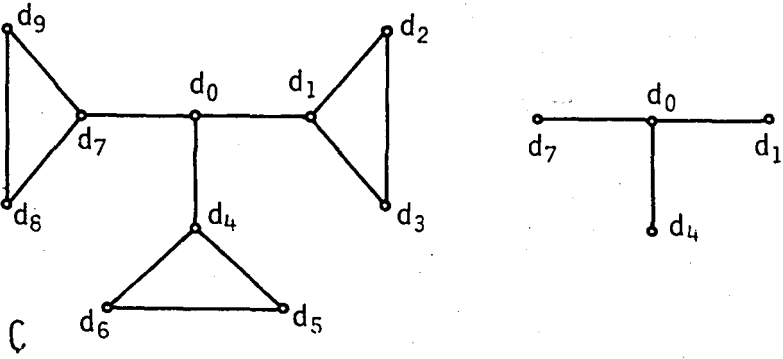


Şekil 4.4.1 1-ayrışır çizge ve 1-ayrışımı.

Genel bir çizgede, 1-ayrılığın varlığını saptamak için, aşağıdaki teoremi tanıtlamadan vereceğiz.

**Teorem 4.4.1** Döğümlerinin toplamı çiftsayı olan  $\mathcal{C}(d,a)$  çizgesinde en az bir 1-ayrılığın bulunması için gerek ve yeter koşul;  $h$  sayıda döğümden oluşan bir döğüm kümesi çizgeden çıkarıldığında geriye kalan çizgede, döğümleri tek sayıya eşit parçaların sayısının  $h$  den çok olmamasıdır.

Örneğin, Şekil 4.4.2'deki  $\zeta$  çizgesini düşünelim. Bu çizgeden  $d_0$  düğümünün çıkarılması, düğümleri teksayıya eşit 3 parça oluşturmaktadır. Bu sayı çıkarılan düğüm sayısından büyük olduğu için  $\zeta(d, a)$  da 1-ayrık yoktur.

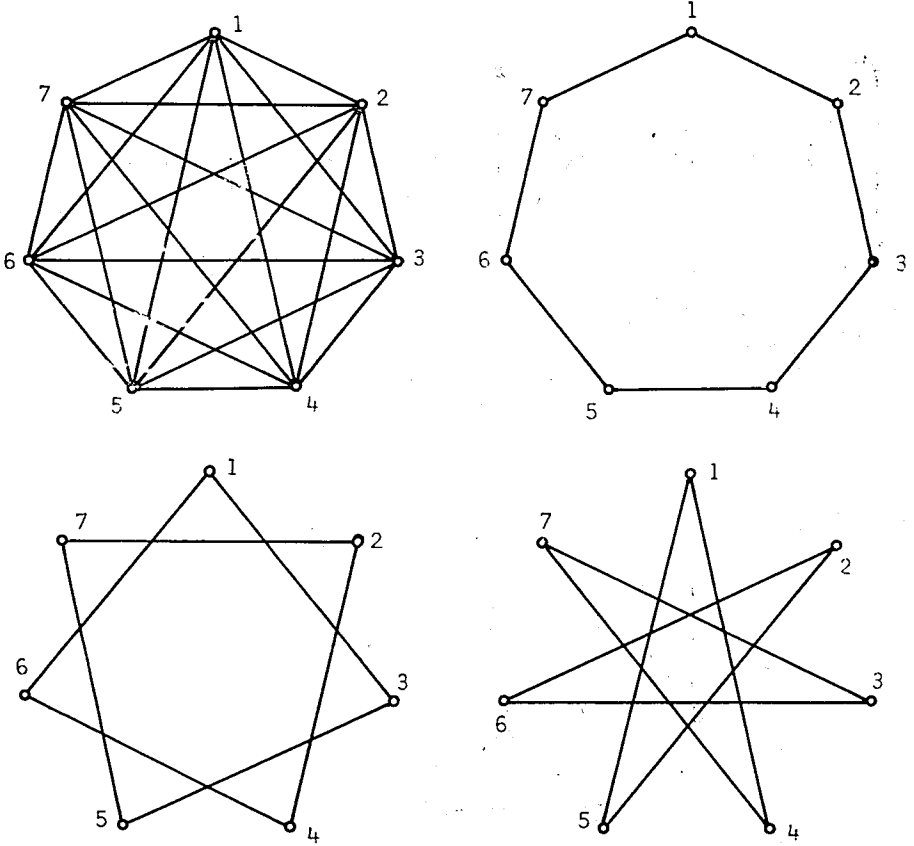


Şekil 4.4.2 Teorem 4.4.1 in açıklanması.

Teorem 4.4.1 i uygun biçimde ve yeterince uygulayarak bir çizgenin, eğer varsa 1-ayrışımı

#### 4.4 Ayrışma

elde edilebilir.  $n$ -ayrışırılıkla ilgili genel bir gerek ve yeter koşul veremeyiz. Ancak Euler çizgelerinin 2-ayrışır olduğu kolayca görülebilir. Şekil 4.4.3 de,  $D(7)$  nin 2-ayrışımı gösterilmiştir.



Şekil 4.4.3 2-ayrışır bir çizge ve 2-ayrışımı.

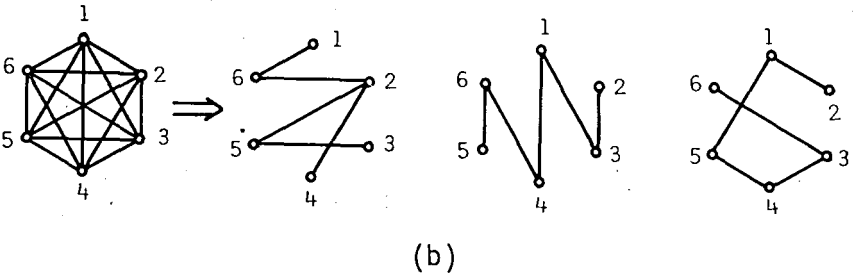
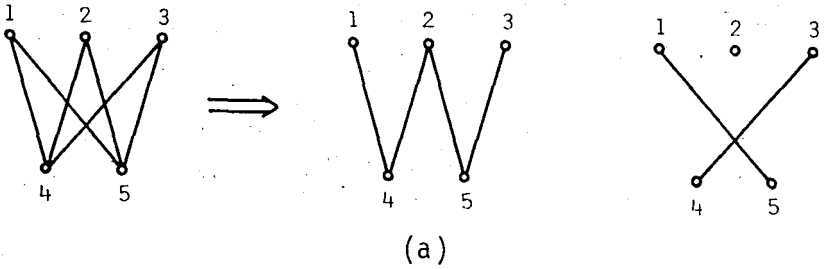
Başka bir ayrışım türü de, ağaç ayrışımıdır.

**Tanım 4.4.3**  $z_i$  ve  $z_j$ ,  $C(d,a)$  daki bütün

düğümüleri içeren iki Z-çizgesini gösterebilirsin. Bütün  $i$  ve  $j$  ler için,

$$Z_i \cap Z_j = \emptyset$$

koşulu altında,  $\zeta(d,a)$  nın ayrışabileceği en küçük kapsar Z-çizgesi sayısına çizgenin ağaçlık katsayısı  $\Pi$ , bu ayrışmaya da ağaç ayrışımı denir.



Şekil 4.4.4 Ağaç ayrışımı a)  $K(2,3)$  b)  $D(6)$ .

Bundan böyle  $\{h\}$  simgesi,  $h$  tamsayı ise  $h$  yi,  $h$  kamsayı değilse  $h$  den sonra gelen ilk tamsayı gösterebilir. Dolu ve ikikümelik çizgelerin ağaçlık katsayıları sırasıyla,

$$\Pi\{D(d)\} = \{d/2\}$$

$$\Pi\{I(m,n)\} = \{mn/(m+n-1)\}$$

olarak bulunabilir.

Genel bir  $\zeta(d,a)$  çizgesinin ağaçlık katsayısına ilişkin aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 4.4.2**  $a_n$ ,  $\zeta(d,a)$  daki  $n$  düğümden oluşan bir altçizgede bulunabilecek ayrıtların en büyük sayısını gösterebilir.  $\zeta(d,a)$  nın ağaçlık katsayısı,

$$\Pi\{\zeta(d,a)\} = \text{en büyük } \{a_n/(n-1)\}_{(n)}$$

*Tanıt*

$\zeta(d,a)$  yı kapsayan bir  $Z$ -çizgesindeki dal sayısı en çok  $d-1$  dir. Öyleyse,

$$\Pi\{\zeta(d,a)\} \geq a/(d-1)$$

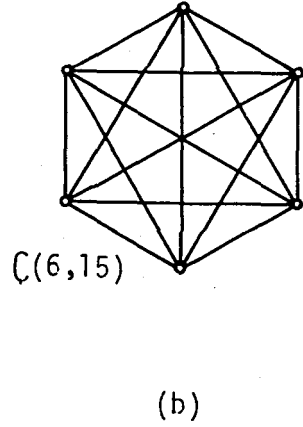
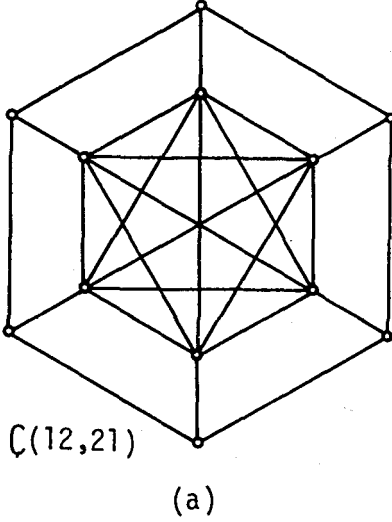
dir.  $C_n$ ,  $\zeta(d,a)$  nın  $n$  ( $n \leq d$ ) düğüm olan bir

altçizgesini gösterebilirsin. En çok ayrıtı ( $a_n$ ) içeren bu çizgilerden biri için,

$$\{ a_n/(n-1) \} \geq \{ a/(d-1) \}$$

olacaktır. ■

Şekil 4.4.5 a ve b de gösterilen sırasıyla  $\zeta(12,21)$  i ve bu çizgenin bir altçizgesi  $\zeta(6,15)$  i düşünelim. Burada,



Şekil 4.4.5 Teorem 4.4.2 ye örnek.

$$\begin{aligned} \Pi \{ \zeta(12,21) \} &= 3 \\ &= \{ 15/5 \} > \{ 21/11 \} \end{aligned}$$

dir. Düzlemsel çizgiler için  $\Pi$  nin en çok 3 olabileceğini gösterebiliriz ( $\Pi = 3$  olan düzlemsel

bir çizge bulunuz).

Alt bölüm 4.2 de, genel bir çizgenin, üzerine yeterince sayıda tutamak eklenmiş bir yuvarlağa çizilebileceğini görmüştük.  $\mathcal{C}(d,a)$  nın düzlemsellik ile ilgili ayrışmasını incelemek için, ilk bakışta özdeşmiş gibi gözükebilecek dört tanım vereceğiz.

**Tanım 4.4.4**  $n$  ile gösterilen  $\mathcal{C}(d,a)$  nın çizilebilmesi için yuvarlağa eklenmesi gerekli en az tutamak sayısına, çizgenin kulağı denir.

Bu tanıma göre Şekil 4.2.9 da gösterilen çizgeler 1 kulaklıdır. Dolu ve ikikümelî çizgelerin kulak sayılarının sırasıyla,

$$n\{D(d)\} = \{ (d-3)(d-4) / 12 \}$$

$$n\{I(m,n)\} = \{ (m-2)(n-2) / 4 \}$$

olduğunu gösterebiliriz.

**Tanım 4.4.5**  $\theta$  ile gösterilen,  $\mathcal{C}(d,a)$  nın düzleme çizilebilmesi için, ayrıtların gerekli olan en az sayıdaki kesişmesine, çizgenin kesişim katsayısı denir.

D(5) için,

$$\eta = \theta = 1$$

olduğu hemen görülebilir. Ancak bu asitlik, örneğin D(7) için doğru değildir.

**Tanım 4.4.6**  $\xi$  ile gösterilen  $C(d,a)$  nın ayrışımı için, gerekli en az düzlemsel çizge sayısına, çizgenin kalınlığı denir.

**Tanım 4.4.7**  $\zeta$  ile gösterilen  $C(d,a)$  nın ayrışımı için, gerekli en çok düzlemsel olmayan çizge sayısına, çizgenin kabalığı denir.

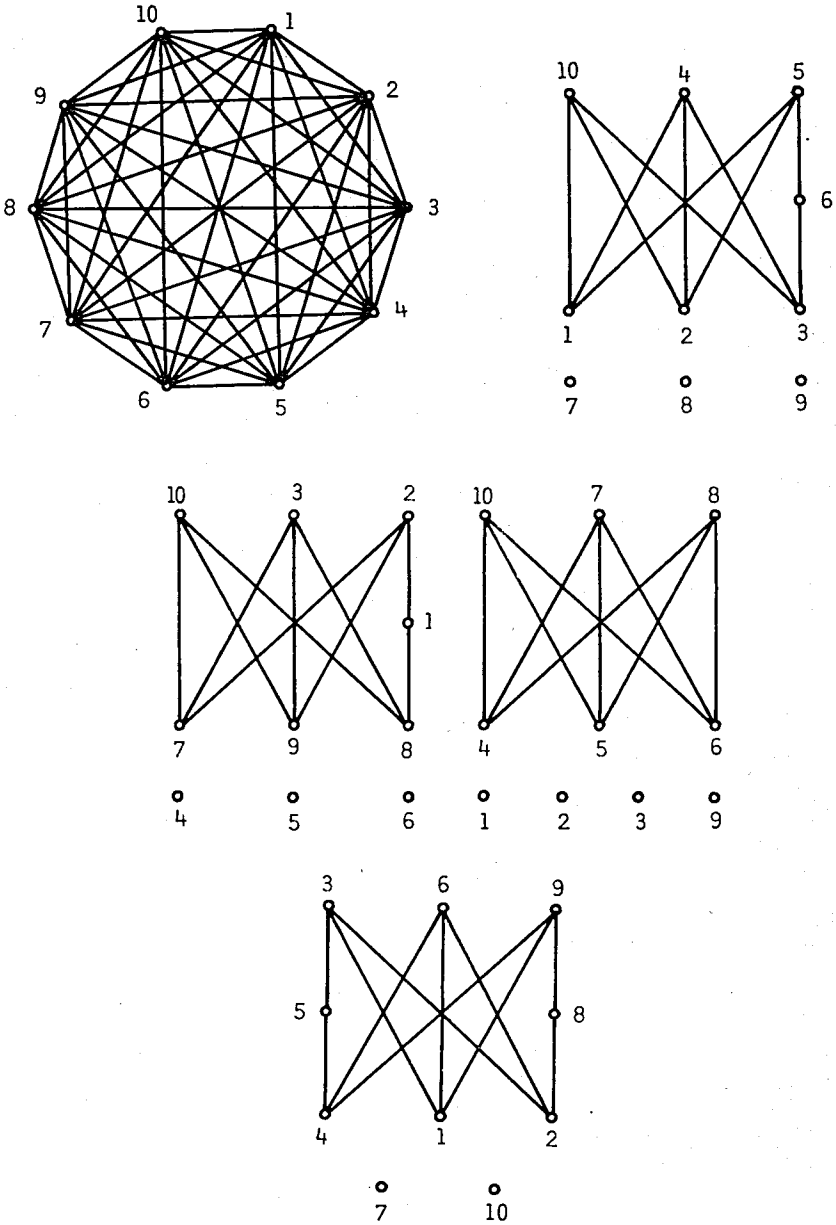
Şekil 4.4.6 da D(10) çizgesinin düzlemsel olmayan çizgelere ayrışımı gösterilmiştir (Harary).

Şekilden, D(10) için  $\xi = 4$  olduğu görülür.

Kuratowski çizgeleri için,  $\xi = 2$  ve  $\zeta = 1$  dir.

Kulak, kesişim, kalınlık ya da kabalığı verecek genel denklemler ya da yöntemler bilinmemektedir. Ancak çok özel yapıları çizgeler için bazı sonuçlar bulunabilmiştir (Siz de bu konu üzerinde düşünmek istemez misiniz?).





Şekil 4.4.6 Kabalıı 4 olan  $D(10)$  çizgesinin düzlemsel olmayan çizgelere ayrışımı.

#### 4.5 DÖRT RENK SANITI

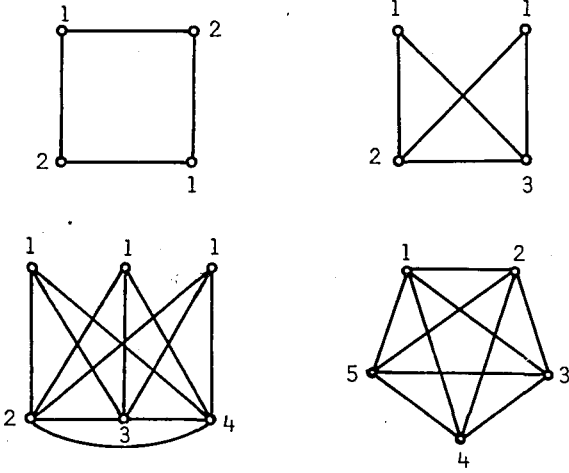
Buraya kadarki incelememizde, bir çoklarının tanıtını düşünmek için okuyucuya bırakarak, çizge kuramının temel sorunları arasında kısa bir gezi yaptık. Bu geziyi, okuyucunun bütün yaşamı boyunca üzerinde düşünebileceği, çizge kuramının belki de en görkemli sorunu olan 'Dört Renk Sanıtı'nı' tanıtarak bitireceğiz.

Düzlemsel bir çizgenin yüzlerini düşünelim. Bitişik yüzlerin ayrı renklere boyanması kuralını gözeterek, böylesine bir çizgenin her bir yüzünü boyamaya çalışalım. Gerek duyacağımız en az değişik renk sayısına, çizgenin *yüzlerin renk sayısı* diyeceğiz. Her düzlemsel çizgeye ilişkin bir çiftesin varlığını ve düzlemsel çizgedeki yüzlerin çiftes çizgede düğümlere karşı düştüğünü biliyoruz. Öyleyse, çizgenin yüzlerinin boyanabilirliği ile düğümlerin boyanabilirliği eşanlıdır. Bundan böyle boyanırlıktan, düğümlerin boyanırlığını anlayacağız. Bitişik düğümlerin ayrı renklere boyanması koşulu altında, bir çizgenin düğümlerini boyamak için gerekli en az değişik renk sayısına *çizgenin renk sayısı*,  $\tau$  sayıda boyayı gerektiren çizgelere  $\tau$ -boyanır çizge diyeceğiz. Şekil 4.5.1 de, 2, 3, 4 ve 5-boyanır çizgelere örnek gösterilmiştir. Kısa bir uğraşma, bütün düzlemsel çizgelerin en çok

## 4.5 Dört renk sanıtı

---

4-boyanır olacağı gibi bir düşünce getirecektir aklımıza. İŖte bu gözlemin sonucu,



Ŗekil 4.5.1 2-, 3-, 4- ve 5-boyanır çizgeler.

19. yüzyılın ortalarında çizge kuramcılarını aŖađıdaki kanıtını ortaya attılar.

*Dört Renk Sanıtı:* Bütün düzlemsel çizgeler en çok 4-boyanırdır.

Uzun yıllar sayısız araŖtırmacı bu sanıtını tanıtlamaya uğraŖtı durdu. Bugün de üzerinde çalışan 4 renk sanıtını, artık 19. yüzyıldaki boyutlarını çoktan aŖmış ve kendine özgü bir sorunlar yığınını oluŖturmuŖtur [ 0.0re"The four color problem", Academic Press, New York, 1967 ] Biz burada bu sorunlara girmeyeceğiz. 19.

yüzyılda 4 renk sanıtı tanıtlanmaya uğraşılırken, Kempe tanıtı yaptığını sandı ancak Heawood, Kempe'nin izlediği yolun yalnız 5-boyanırlığı tanıtlayabileceğini gösterdi. İlginçliklerinden dolayı önce Heawood'un 5-boyanırlık teoremini sonra da Kempenin yanlış teoremini vereceğiz.

**Teorem 4.5.1** Bütün düzlemsel çizgeler en çok 5-boyanırdır.

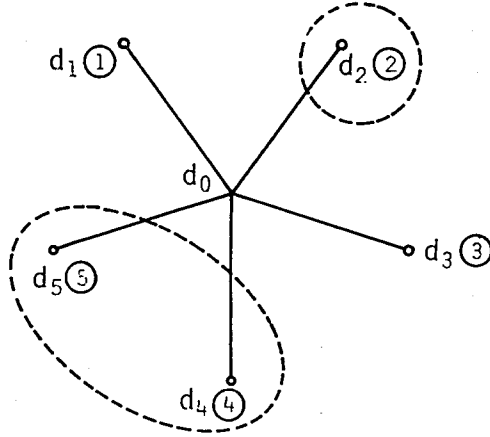
*Tanıt*

Düzlemsel bir  $C(d,a)$  çizgesini düşünelim.  $d = 1, 2, 3, 4$  ve  $5$  için Teoremin doğruluğu hemen görülebilir. Öyleyse Teoremin  $d-1$  düğümlü bütün düzlemsel çizgeler için de doğru olduğunu varsayalım. Teorem 4.1.3 den, düzlemsel bir çizgede kertesisi en çok 5 olan en az bir düğüm bulunduğunu biliyoruz.  $C(d,a)$  da  $d_0$ , kertesisi 5 olan bir düğümü gösterebiliriz. Yukarıda yaptığımız varsayıma göre,

$$C_1 = C(d,a) - (d_0)$$

5-boyanır bir çizgedir. Kullanacağımız bu 5 ayrı rengi ① , ② , ③ , ④ ve ⑤ diye simgeleyelim. Eğer  $d_0$  a bitişik 5 düğümde, 5 ayrı renge boyanmamışsa,  $d_0$  düğümünü kullanılmayan renge boyayarak sorunu çözebiliriz. Öyleyse,  $d_0$  ın bitişik olduğu düğümler  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$  diye

gösterilsen ve  $d_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) ① rengi ile boyanmış olsun (Şekil 4.5.2).



Şekil 4.5.2 5-boyanırılığın tanıtı.

$\zeta_1$  çizgesinde, ① ve ③ ile boyanmış düğümlerin irgittiği alçizgeyi  $\zeta_2$  ile göstereyim.  $\zeta_2$ , genellikle parçalı bir çizge olacaktır. Eğer  $d_1$  ve  $d_2$  düğümleri,  $\zeta_2$  çizgesinin iki ayrı parçası içindeyse  $d_1$  düğümünün bulunduğu parçadaki düğümlerin rengini değiştirebiliriz. Bu işlem sonucu,  $d_1$  düğümüne bitişik düğümlerin boyanmasında ① kullanılmamış olacaktır. Öyleyse  $d_0$  düğümünü ① e boyayabiliriz ve  $\zeta(d,a)$  5-boyanırdır.

Eğer  $d_1$  ve  $d_2$  düğümleri,  $\zeta_2$  çizgesinin aynı parçası içindeyse,  $\zeta_2$ de yalnız ① ve ③ ile boyanmış düğümleri içeren bir  $Y_{13}$  yolu vardır.

$d_3, d_0$  ve  $d_1$  düğümlerinin oluşturduğu yol ile  $\gamma_{13}$  yolu  $\zeta(d,a)$  çizgesinde  $d_2$  ya da  $d_4$  ve  $d_5$  düğümlerini çevreleyen ve  $\zeta$  ile göstereceğimiz bir çevre oluşturacaktır. Öyleyse  $\zeta(d,a)$ da yalnız 2 kullanılmamış olacaktır. Öyleyse,  $d_0$  ı ② ye boyayabiliriz ve  $\zeta(d,a)$  5-boyanırdır. ■

**Teorem** (! ?) Dört renk sanıtı doğrudur.

*Tanııt* (! ?) (Kempe)

Düzlemsel bir  $\zeta(d,a)$  çizgesini düşünelim.  $d=1, 2, 3$  ve  $4$  için teoremin doğruluğu hemen görülür. Öyleyse teoremin,  $d-1$  düğümlü bütün düzlemsel çizgeler için de doğru olduğunu varsayalım.  $\zeta'$ ,  $d$  düğümlü düzlemsel bir çizge olsun.  $\zeta'$  ye yeterince ayrııt ekleyerek elde ettiğimiz düzlemsel çizgeyi  $\zeta$  ile gösterelim. Eğer teorem  $\zeta$  için doğru ise,  $\zeta'$  için de doğrudur. Öyleyse tanııtı yaparken  $d$  düğümlü dönüşül düzlemsel  $\zeta$  çizgesini düşüneceğiz.

Teorem 4.1.3 den,  $\zeta$  de kertesı en çok 5 olan en az bir düğüm bulunduğunu biliyoruz.  $d_0$ ,  $\zeta$  çizgesi içinde kertesı 5 olan bir düğümü göstere, sin,

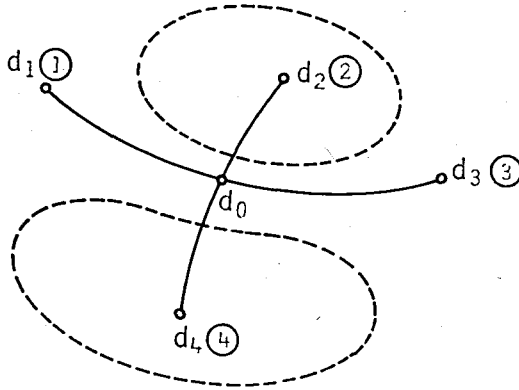
$$\zeta_1 = \zeta - (d_0)$$

olarak tanımlanan çizgede  $d-1$  düğüm vardır ve yukarda yaptığımız varsayımdan dolayı bu çizge

4-boyanırdır. Eğer  $d_0$  düğümüne bitişik düğümlerin boyanmasında ① , ② , ③ ve ④ diye göstereceğımız 4 ayrı renk de kullanılmamışsa,  $d_0$  ı kullanılmayan renge boyayabiliriz ve  $\zeta(d,a)$  4-boyanırdır. Öyleyse,  $d_0$  a bitişik düğümlede 4 ayrı rengin de kullanıldığını varsayalım.  $d_0$  ın kertesine göre önümüze inceleyeceğımız iki durum çıkar.

*Durum 1:*  $d_0$  ın kertesı 4 olsun.

$d_0$  a bitişik düğümler  $d_1, d_2, d_3$  ve  $d_4$  diye simgelensin ve  $d_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) ① ile boyanmış olsun (Şekil 4.5.3).



Şekil 4.5.3 Durum 1 in incelenmesi.

Teorem 4.5.1 in tanıtlanmasında izlediğımız yolun benzeri biçimde,

$$\zeta_1 = \zeta - (d_0)$$

çizgesi 4-boyanırdır.  $\zeta_1$  çizgesinde  $d_1$  ve  $d_3$  düğümlerinin ırgittiği altçizgeyi  $\zeta_2$  ile gösterelim. Eğer  $d_1$  ve  $d_3$ ,  $\zeta_2$  nin iki ayrı parçasında ise,  $d_1$  in bulunduğu parçadaki düğümlerin rengini değiştirerek  $d_0$  a bitişik düğümlerin boyanmasında ① in kullanılmadığı yeni bir boyama düzeni elde ederiz. Öyleyse,  $d_0$  ı ① e boyayabiliriz ve  $\zeta(d,a)$  4-boyanırdır.

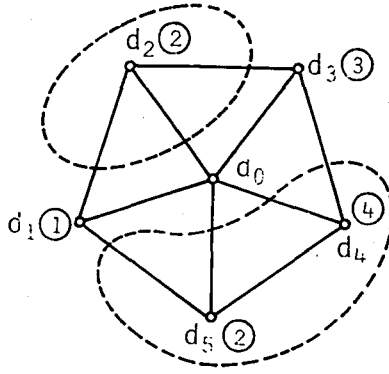
Eğer  $d_1$  ve  $d_3$  düğümleri,  $\zeta_2$  çizgesinin aynı parçası içindeyse, yalnız ① ve ③ ile boyanmış düğümleri içeren bir  $Y_{13}$  yolu vardır.  $d_3, d_0, d_1$  düğümlerinin oluşturduğu yol ile  $Y_{13}$  yolu,  $\zeta(d,a)$  çizgesinde  $d_2$  ya da  $d_4$  düğümünü çevreleyen bir çevre oluşturacaktır. Öyleyse,  $\zeta_1$  de yalnız ② ve ④ ile boyalı düğümleri içeren bir  $Y_{24}$  yolu yoktur.  $\zeta_1$  çizgesinde, ② ve ④ ile boyanmış düğümlerin ırgittiği altçizgeye  $\zeta_3$  ile gösterelim.  $\zeta_3$  parçalı bir çizgedir ve  $d_2$  ile  $d_4$  bu çizgenin iki ayrı parçasındadır.  $d_2$  nin bulunduğu parçadaki düğümlerin rengini değiştirirsek,  $d_0$  a bitişik düğümlerin boyanmasında ② kullanılmamış olacaktır. Öyleyse,  $d_0$  ı ② ye boyayabiliriz ve  $\zeta(d,a)$  4-boyanırdır.

*Durum 2:*  $d_0$  ın kertesı 5 olsun.

$d_0$  a bitişik düğümleri  $d_1, d_2, d_3, d_4$  ve  $d_5$  diye simgeleyelim.  $\zeta$  dönüşül düzlemsel olduğu için, bu



düğümünün oluşturduğu ve 5 uzunlukta bir Ç çevresi vardır. Bitişik düğümler aynı renge boyanamayacağı için bu düğümlerden en az ikisi aynı renktedir. Genellemeden birşek yitirmeksizin,  $d_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) nin ① ye,  $d_5$  in de ② ye boyandığını varsayalım (Şekil 4.5.4).



Şekil 4.5.4 Durum 2 nin incelenmesi.

$$\zeta_1 = \zeta - (d_0)$$

olarak tanımlanan çizgeyi düşünelim.  $\zeta_1$  de, ① ve ③ ile boyanmış düğümlerin ırgittiği altçizge  $\zeta_2$  olsun. Eğer  $d_1$  ve  $d_3$ ,  $\zeta_2$  nin iki ayrı parçasında ise,  $d_1$  in bulunduğu parçadaki düğümlerin renklerini değiştirirsek,  $d_0$  a bitişik düğümlerin boyanmasında ① kullanılmamış olacaktır. Öyleyse,  $d_0$  ı ① e boyayabiliriz ve  $\zeta(d,a)$  4-boyanırdır.

Eğer  $d_1$  ve  $d_3$ ,  $\zeta_2$ 'nin aynı parçası içindeyse,  $\zeta_1$  de yalnız ① ve ③ ile boyalı düğümlerden oluşan bir  $Y_{13}$  yolu vardır.  $d_1, d_0, d_3$  düğümlerinin oluşturduğu yol ile  $Y_{13}$  yolu  $\zeta$  de,  $d_2$  ya da  $d_4$  ve  $d_5$  i çevreleyen bir çevre oluşturacaktır.  $\zeta_1$  de ① ve ④ ile boyalı düğümlerin irgittiği altçizge  $\zeta_3$  olsun. Eğer  $d_1$  ve  $d_4$ ,  $\zeta_3$  ün ayrı parçalarında ise,  $d_1$  in bulunduğu parçadaki düğümlerin renklerini değiştirirsek  $d_0$  a bitişik düğümlerin boyanmasında ① kullanılmaması olacaktır. Öyleyse,  $d_0$  ı ① e boyayabiliriz ve  $\zeta(d,a)$  4-boyanıdır.

Eğer  $d_1$  ve  $d_4$ ,  $\zeta_3$  ün aynı parçası içindeyse,  $\zeta_1$  de yalnız ① ve ④ ile boyalı düğümlerden oluşan bir  $Y_{14}$  yolu vardır.  $d_1, d_0, d_4$  düğümlerinin oluşturduğu yol ile  $Y_{14}$  yolu  $\zeta$  de  $d_5$  ya da  $d_2$  ve  $d_3$  ü çevreleyen bir çevre oluşturacaktır. Yukarıda sözünü ettiğimiz her iki çevre de,  $\zeta_1$  içinde yalnız ② ve ④ ile boyanmış bir  $Y_{24}$  ya da yalnız ② ve ③ ile boyanmış bir  $Y_{35}$  yolu bulunmadığını önermez.  $\zeta_1$  de ② ve ④ ile boyalı düğümlerin irgittiği altçizge  $\zeta_2$ , ② ve ③ ile boyalı düğümlerin irgittiği altçizge ise  $\zeta_3$  olsun. Bu durumda  $d_2$  ve  $d_4$ ,  $\zeta_2$  nin ayrı parçalarında,  $d_3$  ve  $d_5$  ise  $\zeta_3$  ün ayrı parçalarında bulunacaktır.  $\zeta_2$  de,  $d_2$  nin bulunduğu parçadaki düğümlerin ve  $\zeta_3$  de de,  $d_5$  in bulunduğu parçadaki düğümlerin renklerini değiştirirsek,  $\zeta$  de  $d_0$  a bitişik

düğümlerin boyanmasında ② kullanılmamış olacaktır. Öyleyse  $d_0$  ı ② ile boyayabiliriz ve  $\zeta(d,a)$  4-boyandır. ■

Kempe'nin yaptığı bu tanıtıdaki yanlışı, tam 11 yıl sonra Heawood bulabilmişti. Bakalım siz bu yanlışı ne kadar bir sürede bulacaksınız ?

Çizge kuramı üzerine ayrıntılı bir kaynakça, başlı başına bir kitap demektir. Böylesine ayrıntılı bir çalışma, örneğin Turner tarafından yapılmıştır (Turnek, J.: 'A bibliography of graph theory', *Proof Techniques in Graph Theory*, derleyen F. Barary, Academic Press, New York, 1969). Bizim burada derlediğimiz değişik nitelikteki kaynakça iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çizge kuramı ile ilgili kitapların, ikinci bölümde ise çizge kuramı ile ilgili yazıların bulunabileceği dergilerin dizinini verdik. Bu arada kaynakçanın eksiksiz olduğu gibi bir görüşe kapılmanın yanlış olacağını da vurgulamak isteriz. Kaynakçayı derlerken yalnız *İngilizce* yazını ele aldığımız gözden kaçmamalıdır. Neden yalnız İngilizce yazını incelediğimizi de, özellikle düşünmek için okuyucuya bırakıyoruz.

## *Kitaplar:*

Alavi, Y., D. R. Lick ve A. T. White (derleyenler):  
'Graph Theory and Applications', Springer-  
Verlag, Berlin New York, 1972.

Anderson, S. S. :

'Graph Theory and Finite Combinatorics',

Markham Pub. Co. Chicago, 1970.

Avondo-Bodino, G.:

'Economic Applications of the Theory of Graphs', Gordon and Breach, 1962.

Ball, W.:

'Mathematical Recreations and Essays  
Macmillan Co., 1960.

Bari, A. ve F. Harary (derleyenler):

'Graphs and Combinatorics', Springer-Verlag,  
Berlin-New York, 1974.

Battersby, A.:

'Network Analysis for Planning and Scheduling',  
Macmillan, 1964.

Beckenbach, E. (derleyen):

'Applied Combinatorial Mathematics', Univ.  
of Cal. Eng. and Phy. Sci. Extension Series,  
1964.

Beckman, M., C. Mcguire ve C. Winsten:

'Studies on Economics of Transportation',  
Yali Univ. Press, 1956.

Behzad, M. ve G. Chantrand:

'Introduction to the Theory of Graphs',  
Allyn and Bacon Inc., Boston, 1971.

- Bellman, R.E. ve S. Dreyfus:  
'Applied Dynamic Programming', Princeton  
University Press, 1962.
- Bellman, R. E., K. L. Cooke ve J. A. Lackett:  
'Algorithms, Graphs and Computers',  
Academic Press, New York, 1970.
- Berge, C. :  
'Graphs and Hypergraphs' Nort-Holland Pub.  
Co. ve American Elsevier Pub. Co. New-York,  
1973.
- Berge, C.:  
'The Theory of Graphs and its Applications',  
John Wiley, New York, 1962.
- Berztiss, A.:  
'Data Structures, Theory and Practice',  
Academic Press, New York, 1971.
- Biggs, N.:  
'Algebraic Graph Theory', Cambridge  
University Press, 1974.
- Busacker, R. G. ve T. L. Saaty:  
'Finite Graphs and Networks: An Indroduction  
with Applictions', Mc Graw-Hill, New York, 1965.
- Caianifllo, E. (derleyen):  
'Automota Theory', Academic Press, New York,
- Capobianco, M., J. B. Frechen ve M. Krolik  
(derleyenler): 'Recent Trends in Graph

Theory', Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

Chan Shu-Park:

'Introductory Topological Analysis of Electrical Networks', Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

Chartrand, G. ve S. F. Kapoor (derleyenler):

'The Many Facets of Graph Theory', Springer-Verlag, Berlin-New York, 1969.

Chen, W. K.:

'Applied Graph Theory', North-Holland Pub Co., Amsterdam, 1971.

Clay, R.:

'Nonlinear Networks and Systems', Wiley-Interscience, New York, 1971.

Deo, N.:

'Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science', Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1974.

Erdős, P. ve G. Katona (derleyenler):

'Theory of Graphs', Academic Press, New York, 1968.

Even, S.:

'Algorithmic Combinatorics', Macmillan,  
New York, 1973.

Fiedler, M. (derleyen):

'Theory of Graphs and its Applications',  
Academic Press, New York, 1964.

Flament, C.:

'Applications of Graph Theory to Group  
Structures', Prentice-Hall, Englewood  
Cliffs, N. C., 1963.

Flores, I.:

'Data Structures and Manegement', Prentice-  
Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1970.

Ford, L. ve D. Fulkerson:

'Flows in Networks', Princeton Univ. Press,  
1963.

Frank, H. ve I. T. Frisch:

'Communication, Transmission and  
Transportation Networks', Addison-Wesley,  
Reading, Mass., 1971.

Gale, D.:

'The Theory of Linear Economic Models',  
Mc Graw-Hill, New York, 1960.



Grossman, I. ve W. Magnus:

'Groups and Their Graphs', Random House, New  
Math. Library, 1964.

Harary, F.:

'Graph Theory', Addison-Wesley, Reading,  
Mass., 1969.

Harary, F. (derleyen):

'Graph Theory and Theoretical Physics',  
Academic Press, New York, 1967.

Harary, F. (derleyen):

'Proof Techniques in Graph Theory',  
Academic Press, New York, 1969.

Harary, F. (derleyen):

'New Directions in the Theory of Graphs',  
Academic Press, New York, 1973.

Harary, F. ve L. Beineke (derleyenler):

'A Seminar on Graph Theory', Holt, Rinehart,  
Winston Inc., New York, 1967.

Harary, F., R. A. Norman ve D. Cartwright:

'Structural Models: An Introduction to the  
Theory of Directed Graphs', Wiley, New York,  
1965.

Harary, F., ve E. M. Palmer:

'Graphical Enumeration', Academic Press,  
New York, 1973.

Harris, B. (derleyen):

'Graph Theory and its Applications',  
Academic Press, New York, 1970.

Henley, E. J. ve R. A. Williams:

'Graph Theory in Modern Engineering:  
Computer Aided Design, Control, Optimization,  
Reliability Analysis', Academic Press, New  
York, 1973.

Hunasin, T.:

'The Open Mapping and Closed Graph  
Theorems in Topological Vector Spaces',  
Clarendon Press, Oxford, 1965.

Johnson, D. E. ve J. R. Johnson:

'Graph Theory with Engineering Applications',  
Ronald Press, New York, 1972.

Kaufmann, A.:

'Graphs, Dynamic Programming and Finite  
Games', Academic Press, New York, 1967.

Konig, D.:

'Theory of Finite and Infinite Graphs',  
Chelsea,

Lorens, C.:

'Flowgraphs', Mc Graw Hill, New York, 1964.

Magnus, W., A. Karrass ve D. Solitar:

'Combinatorial Group Theory', Interscience  
Publ. 1965.

Malkevitch, J. ve W. Meyer:

'Graphs, Models and Finite Mathematics',  
Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1973.

Marshall, C. W.:

'Applied Graph Theory', Wiley-Interscience,  
New York, 1971.

Maxwell, L. M. ve M. B. Reed:

'The Theory of Graphs: A Basis for Network  
Theory', Pergamon Press, New York, 1971.

Mayeda, W.:

'Graph Theory', Wiley-Interscience, New  
York, 1972.

Moon, J. W.:

'Topics on Tournaments', Holt, Rinehart and  
Winston, New York, 1968.

Nakanishi, N.:

'Graph Theory and Feynman Integrals',  
Gordon and Breach, New York, 1971.

Ore, O.:

'The Four Color Problem', Academic Press,  
New York, 1967.

Ore, O.:

'Theory of Graphs', American Math. Soc.  
Colloquim Publ. No. 38, New York, 1952.

Ore, O.:

'Graphs and Their Uses', Random House, 1963.

Ponstein, J.:

'Matrices in Graph and Network Theory', Van  
Gorcum and Comp., Assen, 1966.

Read, R. C. (derleyen):

'Graph Theory and Computing', Academic  
Press, New York, 1972.

Roberts, F. S.:

'Discrete Mathematical Models', Prentice  
Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

Rosenstiehl, P. (derleyen):

'Theory of Graphs', Gordon and Breach, New  
York, 1967.

Sedlacek, J.:

'Combinatorics in Theory and Practice,  
Introduction to Graph Theory', Naklad.  
Chesk. Akad. Ved. Praque, 1964.

Seshu, S. ve M. B. Reed:

'Linear Graphs and Electrical Networks',  
Addison Wesley, Reading Mass., 1961.

Steiglitz, K.:

'An Introduction to Discrete Systems',  
Wiley, New York, 1974.

Tutte, W. T.:

'Connectivity in Graphs', University of  
Toronto Press., 1966.

Tutte, W. T. (derleyen):

'Recent Progress in Combinatorics', Academic  
Press, New York, 1966.

Wilson, R. J.:

'Introduction to Graph Theory', Academic  
Press, New York, 1972.

*Dergiler:*

'American Journal of Mathematics', Baltimore,  
M.D., A.B.D.

'American Mathematical Monthly, Washington, D.C.,  
A.B.D.

'American Mathematical Society, Bulletin',  
Providence, R.I., A.B.D.

- 'American Mathematical Society, Proceeding',  
Providence, R.I., A.B.D.
- 'American Mathematical Society, Transactions',  
Providence, R.I., A.B.D.
- 'Annals of Mathematical Statistics', Heyward,  
Cal., A.B.D.
- 'Annals of Mathematics', Princeton, N. J., A.B.D.
- 'Association for Computing Machinery, Journal of',  
New York, N.Y., A.B.D.
- 'Australian Mathematical Society, Journal of',  
Brisbane, Avusturalya.
- 'Cambridge Philosophical Society, Proceedings',  
Cambridge, Ingiltere,
- 'Canadian Journal of Mathematics', Toronto, Kanada.
- 'Canadian Mathematical Bulletin', Ontario, Kanada.
- 'Computer Journal', Londra, Ingiltere.
- 'Duke Mathematical Journal', Durham, N.C., A.B.D.
- 'Electronics Letters', Stevenage, Hertz, Ingiltere.
- 'Fraklin Institute Journal', Oxford, Ingiltere.
- 'IBM Journal of Research and Development', Armonk,  
N.Y., A.B.D.
- 'IEEE Proceedings', New York, N.Y., A.B.D.
- 'IEEE Transactions on Circuits and Systems', New  
York, N.Y., A.B.D.

- 'International Journal of Circuit Theory and Applications', John Wiley and Sons, New York, A.B.D.
- 'International Journal of Control', Londra, Inghilterra.
- 'Journal of Combinatorial Theory', New York, A.B.D.
- 'London Mathematical Society, Journal of', Londra, Inghilterra.
- 'London Mathematical Society, Proceedings', Londra, Inghilterra.
- 'Mathematics Journal of Indiana University', Bloomington, Ind., A.B.D.
- 'Mathematika, A Journal of Pure and Applied Mathematics', Londra, Inghilterra.
- 'Michigan Mathematical Journal', Ann Arbor, Mich. A.B.D.
- 'National Academy of Science, Proceedings', Washington, D.C., A.B.D.
- 'Networks', New York, N.Y., A.B.D.
- 'Operations Research' Md., A.B.D.
- 'Pacific Journal of Mathematics', Berkeley, Cal. A.B.D.
- 'Quarterly of Applied Mathematics', Providence, R.I., A.B.D.
- 'SIAM Journal on Applied Mathematics', Philadelphia, Pa., A.B.D.
- 'Studies in Applied Mathematics', Cambridge, Mass., A.B.D.

# SİMGELER

---

$A$	ağaç
$A^T$	tümlerağaç
$\underline{A}$	indirgenmiş ayrıt matrisi
$\tilde{A}$	ayrıt matrisi
$A\{\mathcal{C}(d,a)\}$	ayrıt çizgesi
$A\{\mathcal{C}(d,a)_+\}$	n-katkılı ayrıt çizgesi
$A^n\{\mathcal{C}(d,a)\}$	n-nici düzeyde ayrıt çizgesi
$a, a_i$	ayrıt sayısı
$a_i$	i ninci ayrıt
$B$	çevre matrisi
$B_t$	t-çevre matrisi
$b_i$	B nin i ninci dizeği
$\mathcal{C}(d,a)$	çizge
$\mathcal{C}$	çizge
$\tilde{\mathcal{C}}$	tümlerçizge
$\mathcal{C}^n$	f nin n. ninci kuvveti
$\mathcal{C}(d,a)_{+n}$	
$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$	toplam çizge
$\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$	çarpım çizge
$\mathcal{C}_1 [\mathcal{C}_2]$	oluşuk çizge
$\mathcal{C}$	çevre
$\{\mathcal{C}\}$	çevre yığılı
$D(d)$	dolu çizge
$D_{i,j}$	dolaşı
$ D_{i,j} $	dolaşı uzunluğu
$\underline{D}$	indirgenmiş düğüm matrisi
$\tilde{D}$	düğüm matrisi
$d, d_i$	düğüm sayısı



$d_i$	i ninci düğüm
$E$	Euler çizgesi
$\{\mathcal{E}\}$	Euler çizgesi yığılı
$G$	geçiş matrisi
$G_{i,j}$	gezi
$ G_{i,j} $	gezi uzunluğu
$H$	hamilton çizgesi
$H$	$Q_t$ nin özel bir altmatrisi
$I_n$	n boyutunda birim matris
$\pm(m,n)$	ikikümelili çizge
$K$	kesitleme
$\{\mathcal{K}\}$	kesitleme yığılı
$K_1, K_2$	Kuratowski çizgeleri
$K_d$	düğüm kerte matrisi
$K$	en büyük kerte değeri
$k$	en küçük kerte değeri
$k_i$	i ninci düğümün kertesini
$M$	$Q_t$ nin özel bir altmatrisi
$M$	M-çizgesi
$O$	orman
$O^T$	tümlerorman
$O$	sıfır matrisi
$\circ$	özek
$\circ_i$	i ninci özek düğümü
$\circ_b(\mathcal{C})$	çizge öbek sayısı
$\circ_b(d_i)$	$d_i$ düğümünün öbek sayısı
$P$	peterson çizgesi
$P$	indirgenmiş çakışım matrisi

---

$\tilde{P}$	çakışım matrisi
$P_i$	$P$ nin $i$ ninci dizegi
$P$	parça sayısı
$Q$	kesitleme matrisi
$Q_t$	$t$ -kesitleme matrisi
$R(m,n)$	Ramsey sayısı
$S$	$\tilde{S}$
$S$	kerte dizisi
$T$	
$U$	uzaklık matrisi
$u(d_i, d_j)$	uzaklık
$Y_{i,j}$	yol
$ Y_{i,j} $	yol uzunluğu
$y$	yüz sayısı
$y_i$	$i$ sayıda ayrıtla çevrili yüzlerin sayısı
$Z$	Z-çizgesi
$\{Z\}$	Z-çizgesi yığıntı
$\alpha(d_i)$	düğüm açıklığı
$\beta$	bağımsızlık
$\Delta$	düğüm kümesi
$\delta$	aşama
$\xi$	kabalık
$\eta$	kulak
$\theta_1, \theta_2$	temel düzlemsel çizgeler
$\theta$	kesişim katsayısı
$\kappa$	boşluk
$\Lambda$	çekirdek
$\Lambda_0$	temel çekirdek

---

$\lambda =  \Lambda $	çekirdek yoğunluğu
$\lambda_1$	temel çekirdek yoğunluğu
$\zeta$	kalınlık
$\mu$	ağaç sayısı
$\Pi_{\Delta_0}$	$\Delta_0$ ın ırgittiği altçizge
$\pi$	ağaçlık katsayısı
$\sigma$	yarıçap
$\tau$	renk sayısı
$T(d)$	ilkel tümleyen
$\Phi$	çap
$\phi$	boş çizge
$\Psi$	ayrıt kümesi
$\Omega$	$d_j$ nin yöresi
$\tilde{\Omega}$	$d_j$ nin kapalı yöresi
$\omega$	baskınlık

- Abel topluluğu (Abelian group) 109
- açık dolaşı (open walk, open edge sequence) 16
- açık gezi (open edge train) 15
- açıklığı, düğüm 32
- ağaç (tree) 124
- ağaç ayrışımı (decomposition into spanning forests) 221
- ağaçlık katsayısı (arboricity) 221
- altçizge (subgraph), 9
- altçizge, irgitilmiş 12
- kapsar 12, 217
- uygun 8
- uygunsuz 9
- aşama (rank) 129, 206
- ayrık, n- 217
- ayrıklara ayrışma (factorization) 217
- ayrışımı, ağaç 221
- ayrışma 217
- ayrışma, ayrıklara 217
- ayrıt (edge, branch, line, element, arc) 1
- ayrıt, çevre dışı 29
- çevresel 29
- çokkatlı 13
- tekkatlı 13
- ayrıt bitişikliği (edge adjacency) 13
- ayrıt çizgesi (line graph, covering graph, interchange graph, derivative graph, adjoint) 54, 97

- 
- ayrıt çizgesi, ikinci düzeyden 97  
n- katkılı 101
- ayrıt kertesi (edge degree) 105
- ayrıt matrisi (edge incidence matrix) 51, 55
- ayrıt matrisi, indirgenmiş 51
- ayrıt uzaklığı (edge distance) 105
- bağımsız küme (independent set, internally stable set) 72
- bağımsızlık (independence number, coefficient of internal stability) 72
- bağlama, dizi 4  
koşut 4
- bağlı çizge (connected graph) 27
- bağlı çizge, çevresel 29
- bağlı Euler çizgesi (connected Euler graph) 79
- Barnette çizgesi 96
- baskın küme (dominating set, externally stable set) 73
- baskınlık (domination number) 73
- birimsel matris (unimodular matrix, E-matrix) 145
- birleşim işlemi (union operation) 6
- bitişikliği, ayrıt 13  
düğüm 13
- bitişiklik (adjacency) 13
- boş çizge (null graph, empty graph) 9
- boşluk (nullity, cyclomatic number, connectivity, first Betti number) 129, 206
- büzüştürülme (contraction) 189

---

büzüçük altçizge 189  
çakışım (incidence) 1, 47  
çakışım kümesi (incidence set) 3, 123, 156  
çakışım matrisi (incidence matrix, exhaustive  
incidence matrix, vertex matrix) 47, 137  
çakışım matrisi, indirgenmiş 48  
çap (diameter) 33  
çarpım çizge (product graph) 67  
çarpımı, çember 115  
çekirdek (nucleus, kernel) 74  
çekirdek yoğunluğu 74  
çember çarpımı (ring product) 115  
çember toplamı (ring sum) 6  
çepersel çizge (outerplanar graph) 191  
çevre (circuit, loop, closed path) 15, 18, 77  
çevre dışı ayırıt (non-circuit element) 29  
çevre matrisi (circuit matrix, exhaustive circuit  
matrix) 138  
çevresel ayırıt (circuit element) 29  
çevresel bağlı çizge (cyclically connected  
graph) 29  
çevresi, Hamilton 86  
çıkartım işlemi 6  
çift üçgen (even triangle) 101  
çifteş (dual) 208  
çifteşlik (duality) 206  
çizge (graph, 1-complex, linear graph, linear  
complex) 1

---

çizge, bağlı	27
boş	9
çarpım	67
çepersel	191
çevresel bağlı	29
dolu	11
dolu ikikümelî	77
dönüşül düzlemsel	177
düzlemesel	94, 173, 175
düzlemsel olmayan	175
eşkökenli	188
eşyapılı	48
ikikümelî	75
ilkel	3
işlevsel	104
karmaşık	5
n-ayrışır	217
n-katkılı	101
n-kümelî	74
oluşuk	69
örgüt	104, 105
parçalanabilir	29
parçalanamaz	29
parçalı	27
boyanır	222
toplam	66
yalın	5
çizge öbek sayısı	30
çizgenin kökü (root of a graph)	66

---

çizgenin kuvveti (power of a graph) 65  
çizgesi, ayrıt 54, 97  
    bağlı Euler 79  
    Barnette 96  
    Euler 78, 103, 107, 220  
    Hamilton 86, 103  
    ikinci düzeyden ayrıt 97  
    Kuratowski 189, 190, 195, 212  
    M- 112  
    n-katkılı ayrıt 101  
    Peterson 189, 190  
    Tutte 95  
    Z- 116  
çoğulçizge (multiple graph) 5  
çokkatlı ayrıt 15  
çokyüzlü (polyhedron) 179, 180  
çokyüzlü, düzgün 182  
dal (branch, tree branch) 128  
dışyüz (external region, outside region) 176  
Dirac Teoremi 93  
dizi, düğümse1 21  
dizi bağlama (series connection) 4  
dizisel değiştirim işlemi 188  
dizisi, kerte 20  
dolaşı (walk, edge sequence) 15, 53  
dolaşı, açık 16  
    kapalı 15  
dolaşı uzunluğu 16



---

dolu çizge (complete graph) 11  
dolu ikikümelî çizge 77  
dönüşül düzlemsel çizge (maximally planar graph)  
177  
dört renk sanıtı (four color conjecture) 227  
düğüm (node, vertex, point, 0-cell) 1  
düğüm açıklığı (eccentricity) 32  
düğüm bitişikliği (vertex adjacency) 13  
düğüm çıkartım işlemi 6  
düğüm kerte matrisi 20  
düğüm kertesî (vertex degree) 17  
düğüm matrisi (adjacency matrix, vertex incidence  
matrix) 49  
düğüm matrisi, indirgenmiş 50  
düğüm öbek sayısı 30  
düğümleri, özek 32  
düğümsele dizi (graphical sequence) 21  
düğümü, eklem 27, 116  
iç 18  
düzgün çokyüzlü (regular polyhedron) 182  
düzlemsel çizge (planar graph) 94, 173, 175  
düzlemsel çizge, dönüşül 177  
düzlemsel olmayan çizge (nonplanar graph) 175  
eklem düğümü (articulation point, cut vertex)  
27, 116  
eşkökenli çizge 188  
eşyapılı çizge 48  
eşyapılılık (isomorphism) 48  
eşyapılılık işlemleri 147

---

Euler çizgesi 78, 94, 103, 107, 220  
Euler çizgesi, bağlı 79  
Euler eşitliği 176  
geçiş matrisi 170  
gezi (edge train) 15, 112  
gezi, açık 16  
    kapalı 16, 79  
gezi uzunluğu 16  
H-matrisi 149  
Hamilton çevresi 86  
Hamilton çizgesi 86, 103  
Hamilton yolu 86  
Heawood 229, 236  
iç düğüm (internal vertex) 18  
içyüz (internal region, window) 175  
ikikümelî çizge (bipartite graph) 72, 75  
ikikümelî çizge, dolu 77  
ikinci düzeyden ayırıt çizgesi 97  
ikinci düzeyden eşyapılılık (2-isomorphism) 212  
ilkel çizge 3  
ilkel tümleyen 12  
indirgeme işlemi 114  
indirgenmiş ayırıt matrisi 51  
indirgenmiş çakışım matrisi (incidence matrix,  
    reduced incidence matrix) 48  
indirgenmiş düğüm matrisi 50  
irgitilmiş altçizge (induced subgraph) 12  
işlemi, birleşim 6

---

çıkartım	6
dizisel değiştirim	188
düğüm çıkartım	6
eşyapılı	147
indirgeme	114
kesişim	6
işlevsel çizge	104
kabalık (coarseness)	225
kalınlık (thickness)	225
kapalı dolaşı (closed walk)	15
kapalı gezi (closed edge train)	16, 79
kapalı yol (closed path)	18
kapalı yöre (closed neighborhood)	13
kapsar altçizge (spanning subgraph)	12, 217
karmaşık çizge	5
kat (multiplicity)	15
katsayısı, ağaçlık	221
kasişim	224
Kempe	229, 231
kerte (degree, valency)	17
kerte dizisi (degree sequence)	20
Kerte matrisi, düğüm	20
kertesini, ayrıt	105
düğüm	17
kesişim katsayısı (crossing number)	224
kesişim işlemi	6
kesitleme (cut-set)	118
kesitleme matrisi (cut-set matrix, exhaustive cut-set matrix)	141

---

kirif (chord, link) 128  
koşut bağlama (parallel connection) 3  
köken 188  
kökteşlik (homeomorphism) 187, 191  
kökü, çizgenin 66  
Königsberg köpraları 78, 83  
köprü (bridge, noncircuit element) 27  
kulak (genus) 224  
Kuratowski çizgesi 189, 190, 195, 212  
Kuratowski teoremi 195  
kuvveti, çizgenin 65  
küme, bağımsız 72  
    baskın 73  
Listin Teoremi 82  
M-çizgesi (M-graph) 112  
M-matrisi 155  
M-matrisi, temel 156  
matris, birimsel 145  
matrisi, ayrıt 51, 55  
    çakışım 47, 137  
    çevre 138  
    düğüm kerte 20  
    geçiş 170  
H- 149  
    indirgenmiş ayrıt 51  
    indirgenmiş çakışım 48  
    indirgenmiş düğüm 50  
kesitleme 141

---

M- 155  
t-çevre 137, 140  
t-kesitleme 137, 142, 149  
tanım 47  
temel M- 156  
uzaklık 34  
n-ayrık (n-factor) 217  
n-ayrıştır çizge 217  
n-katkılı ayrıt çizgesi 101  
n-katkılı çizge (subdivision graph) 101  
n-kümelı çizge (n-partite graph) 74  
oluşuk çizge (composed graph) 69  
Ore Teoremi 93  
Orman (forest) 128  
öbek (block) 29  
öbek sayısı, çizge 30  
düğüm 30  
öbeklere parçalanma 29  
örgüt çizge (clique graph) 104, 105  
özçekirdek 74  
özçekirdek yoğunluğu 74  
özçifteş (self dual) 210  
özek (center) 31, 32  
özek düğümleri (central vertices) 32  
parça (part, component, maximally connected subgraph) 27  
parçalanma öbekleri 29  
parçalanabilir çizge (separable graph) 29

---

parçalanamaz çizge (nonseparable graph) 29  
Parçalı çizge (unconnected graph, separated graph) 27  
Peterson çizgesi 189, 190  
Posa Teoremi 86  
Ramsey sayısı 37, 38  
renk sayısı (chromatic number) 227  
sap 28  
satranç oyunu 90  
sayısı, Ramsey 37, 38  
renk 227  
sözdecizge (pseudo graph) 4  
J-boyanır çizge ( $\tau$ -colorable graph) 227  
t-çevre (temel çevre) (f-circuit, fundamental circuit) 129  
t-çevre matrisi (f-circuit matrix) 137,140  
t-kesitleme (temel kesitleme) (f-cut-set, fundamental cut-set) 132  
t-kesitleme matrisi (f-cut-set matrix) 137, 142, 149  
Taite sanıtı 95  
tanım matrisi 47  
tek üçgen (odd triangle) 100, 101  
tekayrıt 3  
tekçevre (self loop) 3  
tekdüğüm (isolated vertex) 3  
tekkatlı ayırıt 15  
temel M-matrisi 156  
temizleme 189  
toplam çizge (join graph, sum graph) 66

---

toplamı, çember	6
topluluğu, Abel	109
tutamak (handle)	202, 224
Tutte çizgesi	95
Tutte Teoremi	216
tümleraltçizge	10
temlerağaç (co-tree)	128
tümlerçizge	12
tümlerorman (co-forest)	128
tümleyen (complement)	10
tümleyen, ilkel	12
uç düğümü (terminal vertex)	3, 15, 16, 112
uygun altçizge (proper subgraph)	9
uygun üstçizge (proper supergraph)	9
uygunsuz altçizge (improper subgraph)	9
uygunsuz üstçizge (improper supergraph)	9
uzaklığı, ayrıt	105
uzaklık (distance)	31
uzaklık matrisi (distance matrix)	34
uzunluğu, dolaşı	16
gezi	16
yol	18
uzunluk (length)	16
üçgen (triangle)	11, 135, 178
üçgen, çift	101
tek	100, 101
üreteç (generator)	109, 143
üstçizge (supergraph)	9

---

üstçizge, uygun	9
uygunsuz	9
Veblen teoremi	79
Whitney teoremi	211
yalın çizge (simple graph)	5
yarıçap (radius)	32
yarıçapsal yol (radial path, radial arc)	32
yığın (collection)	107
yoğunluğu, çekirdek	71
özçekirdek	74
yol (path)	15, 18, 111
yol, kapalı	18
yarıçapsal	32
yol uzunluğu (path length)	18
yolu, Hamilton	86
yöre (neighborhood)	13
yöre, kapalı	13
yüz (face, region)	175, 176
Z-çizgesi ( $\tau$ -graph)	116